UTILISATION DES OPÉRATEURS EN SCIENCES PHYSIQUES

1 : Généralités sur les champs

Soit un point mobile M de l'espace de coordonnées cartésiennes (x,y,z). M appartient à un champ si les propriétés locales de l'espace dépendent de la position du point M, donc des coordonnées (x,y,z). Ces propriétés dépendent aussi du temps dans le cas général. Dans les cas particuliers où ces propriétés ne dépendent pas du temps, le champ est qualifié de « statique » ou « permanent » ou « stationnaire » .

* Ces grandeurs locales (ou « intensives ») peuvent être scalaires (exemples : la pression P, la température T, le potentiel électrique V...). Le champ est alors caractérisé par une fonction f qui à (x,y,z) associe f(x,y,z) = P (ou T, ou V...).

* Ces grandeurs locales peuvent être vectorielles (exemples : vecteur champ électrique $\overrightarrow{E}$, vecteur champ d'induction magnétique $\overrightarrow{B}$, vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$ ...) . Le champ est alors caractérisé par trois fonctions numériques de (x,y,z) ; par exemple :

$$\begin{cases} E_x = f_1(x, y, z) \\ E_y = f_2(x, y, z) \\ E_z = f_3(x, y, z) \end{cases}$$

2 : Opérateur vectoriel nabla

Les définitions et propriétés des opérateurs « dérivée partielle » : $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial y}{\partial y}$, , $\frac{\partial}{\partial z}$, étant supposées connues, on définit l'opérateur « nabla » par :

$$\boxed{\overrightarrow{\nabla} = \overrightarrow{u_x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \overrightarrow{u_y} \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \overrightarrow{u_z} \cdot \frac{\partial}{\partial z}}$$

3 : Vecteur gradient d'un champ scalaire

On obtient le gradient d'un champ scalaire en appliquant l'opérateur nabla à ce champ . Ainsi, par exemple, le vecteur gradient de la pression P, défini au point M, sera :

$$\boxed{\overrightarrow{grad}(P) = \overrightarrow{u_x} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + \overrightarrow{u_y} \cdot \frac{\partial P}{\partial y} + \overrightarrow{u_z} \cdot \frac{\partial P}{\partial z}}$$

4 : Propriété fondamentale du gradient

Soit un déplacement élémentaire $\overrightarrow{dl} = \overrightarrow{dOM}$ du point M et dP la variation élémentaire correspondante de la grandeur scalaire P = f(x,y,z). L'expression générale de la différentielle de P s'écrit :

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial P}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot dz$$

Or :

$$\overrightarrow{dl} = \overrightarrow{dOM} = dx \cdot \overrightarrow{u_x} + dy \cdot \overrightarrow{u_y} + dz \cdot \overrightarrow{u_z}$$

Compte tenu de la définition du produit scalaire, on constate :

$$\boxed{dP = \overrightarrow{grad}(P) \cdot \overrightarrow{dl}}$$

Conséquence : soit un déplacement élémentaire $\overrightarrow{dl}$ à partir de M sur la surface de niveau passant par M (surface telle que P = constante en tous ses points). La variation de P est ainsi nulle lors du déplacement. On obtient donc : dP = 0 soit : $\overrightarrow{grad}(P) \perp \overrightarrow{dl}$.

Le vecteur gradient en M est orthogonal à la surface de niveau passant par M et orienté dans le sens croissant de P (propriété évidente des dérivées).

5 : Expression du gradient en coordonnées cylindro-polaires

$$\overrightarrow{dl} = dr \cdot \overrightarrow{u_r} + r \cdot d\theta \cdot \overrightarrow{u_\theta} + dz \cdot \overrightarrow{u_z}$$

La différentielle de P, sachant que P est une fonction des variables (r, θ, z), s'écrit :

$$dP = \frac{\partial P}{\partial r} \cdot dr + \frac{\partial P}{\partial \theta} \cdot d\theta + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot dz$$

Soient (A,B,C) les composantes du vecteur gradient de P en M ; la propriété fondamentale énoncée Partie IV permet d'écrire :

$$dP = \frac{\partial P}{\partial r} \cdot dr + \frac{\partial P}{\partial \theta} \cdot d\theta + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot dz = \overrightarrow{grad}\,(P) \cdot \overrightarrow{dl} = A \cdot dr + B \cdot r \cdot d\theta + C \cdot dz$$

Par identification : $A = \frac{\partial P}{\partial r}$; $B = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial P}{\partial \theta}$; $C = \frac{\partial P}{\partial z}$; d'où :

$$\boxed{\overrightarrow{grad}\,(P) = \frac{\partial P}{\partial r} \cdot \overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial P}{\partial \theta} \cdot \overrightarrow{u_\theta} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \overrightarrow{u_z}}$$

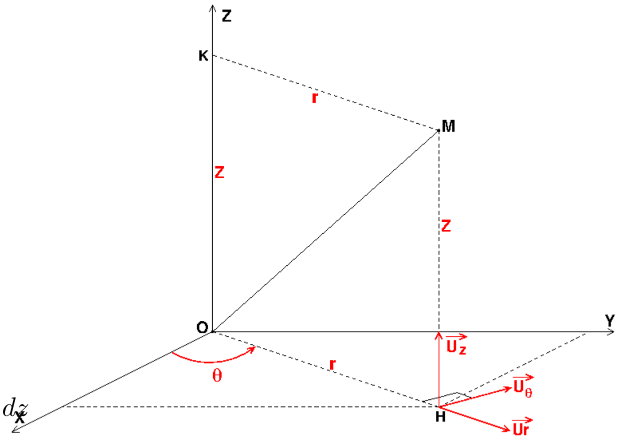


FIGURE 1 – Coordonnées cylindro-polaires

6 : Expression du gradient en coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{dl} = dr \cdot \overrightarrow{u_r} + r \cdot d\theta \cdot \overrightarrow{u_\theta} + r \cdot \sin(\theta) \cdot d\varphi \cdot \overrightarrow{u_\varphi}$$

Attention : certains ouvrages permutent les significations de θ et φ ...

En considérant P comme une fonction des variables (r, θ, φ), la différentielle de P peut s'écrire :

$$dP = \frac{\partial P}{\partial r} \cdot dr + \frac{\partial P}{\partial \theta} \cdot d\theta + \frac{\partial P}{\partial \varphi} \cdot d\varphi$$

Soient (A,B,C) les composantes du vecteur gradient de P en M ; la propriété fondamentale énoncée Partie IV permet d'écrire :

$$dP = \overrightarrow{grad}\,(P) \cdot \overrightarrow{dl} = A \cdot dr + B \cdot r \cdot d\theta + C \cdot r \cdot \sin(\theta) \cdot d\varphi$$

Par identification : $A = \frac{\partial P}{\partial r}$; $B = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial P}{\partial \theta}$; $C = \frac{1}{r \cdot \sin(\theta)} \cdot \frac{\partial P}{\partial \varphi}$
D'où :

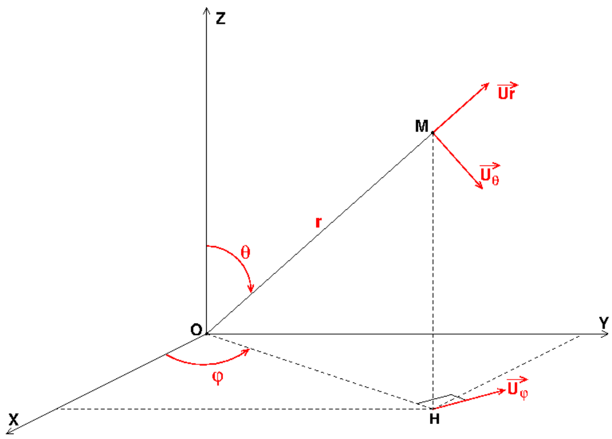


FIGURE 2 – Coordonnées sphériques

$$\boxed{\overrightarrow{grad}\,(P) = \frac{\partial P}{\partial r} \cdot \overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial P}{\partial \theta} \cdot \overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{r \cdot \sin(\theta)} \cdot \frac{\partial P}{\partial \varphi} \cdot \overrightarrow{u_\varphi}}$$

Application : soit $f(r) = \frac{1}{r}$ avec $r = \|\overrightarrow{OM}\|$; l'application du résultat précédent permet d'obtenir :

$$\overrightarrow{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\overrightarrow{u_r}}{r^2}$$

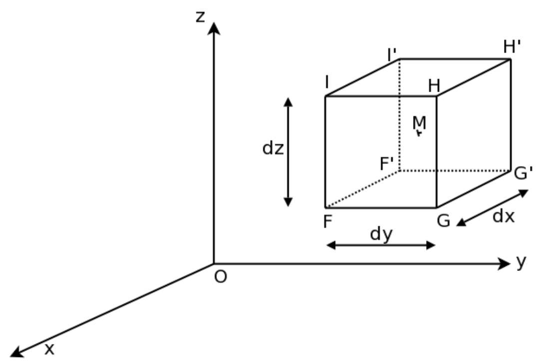
7 : Équivalence densité surfacique – densité volumique de force

Soit le point M de coordonnées (x,y,z), et $d\tau$=dx.dy.dz le volume élémentaire du parallélépipède rectangle centré en M de sommets :

F(x+dx/2,y-dy/2,z-dz/2), G(x+dx/2,y+dy/2,z-dz/2),

H(x+dx/2,y+dy/2,z+dz/2), I(x+dx/2,y-dy/2,z+dz/2), F'(x-dx/2,y-dy/2,z-dz/2),

G'(x-dx/2,y+dy/2,z-dz/2), H'(x-dx/2,y+dy/2,z+dz/2), I'(x-dx/2,y-dy/2,z+dz/2). Il s'agit d'exprimer la résultante des forces de pression exercées par le milieu extérieur fluide sur les six faces du parallélépipède élémentaire que nous venons de définir.



La force de pression exercée sur la face (FGHI) par le milieu extérieur a pour expression :

$$\overrightarrow{dF_1} = P_{(x-\frac{dx}{2},y,z)} \cdot dy \cdot dz \cdot \overrightarrow{u_x}$$

La force de pression exercée par le milieu extérieur sur la face opposée (F',G',H',I') a pour expression :

$$\overrightarrow{dF_2} = -P_{(x+\frac{dx}{2},y,z)} \cdot dy \cdot dz \cdot \overrightarrow{u_x}$$

La résultante de ces deux forces a pour expression :

$$\overrightarrow{dF_1} + \overrightarrow{dF_2} = \left[P_{(x-\frac{dx}{2},y,z)} - P_{(x+\frac{dx}{2},y,z)}\right] \cdot dy \cdot dz \cdot \overrightarrow{u_x}$$

Or :

$$P_{(x-\frac{dx}{2},y,z)} - P_{(x+\frac{dx}{2},y,z)} = -\frac{\partial P}{\partial x} \cdot dx$$

Donc :

$$\overrightarrow{dF_1} + \overrightarrow{dF_4} = -\frac{\partial P}{\partial x} \cdot d\tau \cdot \overrightarrow{u_x}$$

Par permutation circulaire, on peut obtenir de la même façon les forces de pression exercées sur les deux autres paires de faces.

Forces pressantes exercées sur les faces (II'F'F) et GG'H'H) :

$$\overrightarrow{dF_3} + \overrightarrow{dF_4} = -\frac{\partial P}{\partial y} \cdot dy \cdot dx \cdot dz \cdot \overrightarrow{u_y} = -\frac{\partial P}{\partial y} \cdot d\tau \cdot \overrightarrow{u_y}$$

Forces pressantes exercées sur les faces (FGG'F') et (HH'I'I) :

$$\overrightarrow{dF_5} + \overrightarrow{dF_6} = -\frac{\partial P}{\partial z} \cdot dz \cdot dx \cdot dy \cdot \overrightarrow{u_y} = -\frac{\partial P}{\partial z} \cdot d\tau \cdot \overrightarrow{u_z}$$

La résultante de ces six forces pressantes a ainsi pour expression :

$$\overrightarrow{dF} = -\left(\overrightarrow{u_x} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + \overrightarrow{u_y} \cdot \frac{\partial P}{\partial y} + \overrightarrow{u_z} \cdot \frac{\partial P}{\partial z}\right) \cdot d\tau$$

Soit finalement :

$$\boxed{\overrightarrow{dF} = -\overrightarrow{grad}\,(P) \cdot d\tau}$$

On voit bien qu'une distribution surfacique de force est équivalente à une distribution volumique, la densité volumique de force étant égale à l'opposé du gradient de la pression.

8 : Théorème du gradient

Soit une surface fermée (S) délimitant un volume (τ) . Il s'agit d'exprimer la résultante des forces de pression exercées par le milieu extérieur sur la surface (S). Soit M un point quelconque de cette surface entourée d'une surface élémentaire d'aire dS. On définit le vecteur surface élémentaire en M , noté $\overrightarrow{dS}$ de la façon suivante : ce vecteur a pour norme l'aire dS, sa direction est la normale en M à la surface (S), ce vecteur est orienté vers l'extérieur du volume délimité. Soit P, la pression en M. L'expression générale de la résultante $\overrightarrow{F}$ a pour expression :

$$\overrightarrow{F} = \iint_{(S)} -P \cdot \overrightarrow{dS}$$

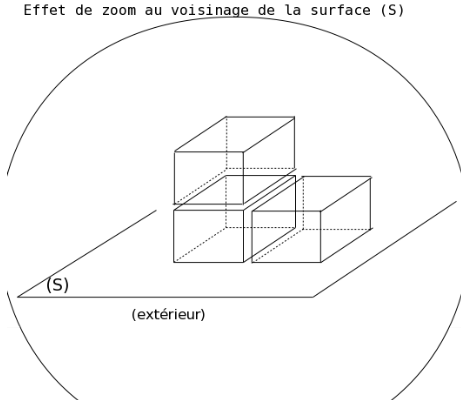
Le signe négatif s'explique par le fait que chaque force élémentaire exercée est orientée vers l'intérieur du volume délimité alors que le vecteur $\overrightarrow{dS}$ est orienté vers l'extérieur.

On peut assimiler ce volume à une juxtaposition de volumes élémentaires tels que ceux décrits au paragraphe précédent. Soit $\overrightarrow{F_1}$ le vecteur défini par l'intégrale de volume étendue à (τ) :

$$\overrightarrow{F_1} = \iiint_{(\tau)} -\overrightarrow{grad}\,(P) \cdot d\tau$$

D'après les résultats acquis au paragraphe précédent, $\overrightarrow{F_1}$ représente la somme des forces de pression exercées sur toutes les faces des parallélépipèdes élémentaires constituants le volume (τ). Soit une surface élémentaire (rectangle (FIF'I') par exemple) ; deux cas sont alors possibles :

Effet de zoom au voisinage de la surface (S)



1° : cette surface élémentaire est à l'intérieur de la portion d'espace délimitée par (S) ; elle est alors commune à deux volumes élémentaires juxtaposées . Principe des actions réciproques : ces deux forces se compensent exactement ; leur résultante est nulle ;

2° : cette surface élémentaire appartient à (S). Elle doit être prise en compte dans le calcul de la résultante $\vec{F}$.

Les forces de pression exercées sur les faces des parallélépipèdes élémentaires se compensent donc deux à deux sauf celles exercées sur les faces appartenant à (S). Nous obtenons donc :

$$\vec{F_1} = \vec{F}$$

Par identification, nous obtenons l'égalité d'une intégrale de surface et d'une intégrale de volume connue sous le nom de **théorème du gradient** :

$$\boxed{\iiint_{(\tau)} \overrightarrow{grad}\,(P) \cdot d\tau = \oiint_{(S)} P \cdot \vec{dS}}$$

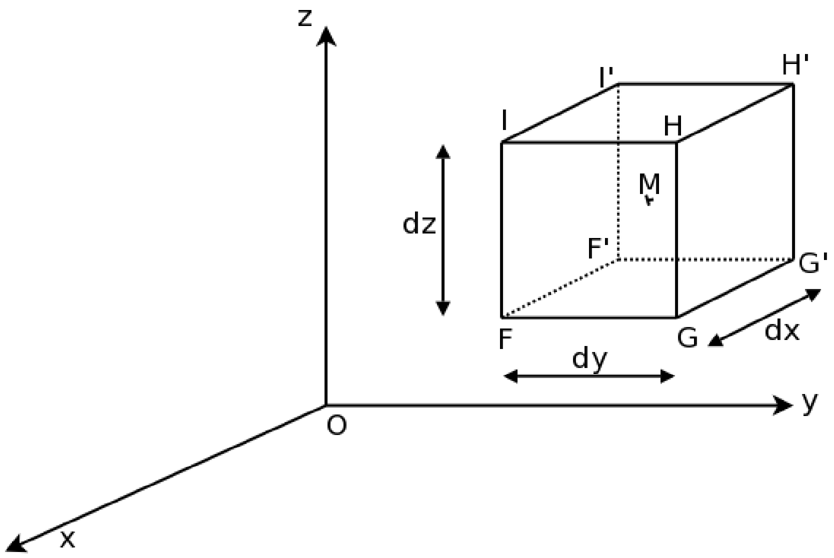
Ce théorème peut être utilisé, entre autres applications, pour démontrer le théorème d'Archimède.

9 : Divergence d'un champ vectoriel

On obtient la divergence du vecteur champ en M en effectuant le produit scalaire : $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$. Soit :

$$\boxed{div\left(\vec{E}\right) = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}}$$

10 : Propriété fondamentale de la divergence d'un vecteur en M



Soit le point M de coordonnées (x,y,z), $\vec{E}$ un vecteur champ en M et $d\tau$ =dx.dy.dz le volume élémentaire du parallélépipède rectangle centré en M de sommets F(x+dx/2,y-dy/2,z-dz/2), G(x+dx/2,y+dy/2,z-dz/2), H(x+dx/2,y+dy/2,z+dz/2), I(x+dx/2,y-dy/2,z+dz/2), F'(x-dx/2,y-dy/2,z-dz/2), G'(x-dx/2,y+dy/2,z-dz/2), H'(x-dx/2,y+dy/2,z+dz/2),

I'(x-dx/2,y-dy/2,z+dz/2). Il s'agit d'exprimer le flux du vecteur champ à travers la surface fermée délimitant le volume $d\tau$. On exprime d'abord le flux du vecteur champ à travers les deux rectangles (FGHI) et (F'G'H'I').

Le flux du vecteur champ $\vec{E}$ à travers le rectangle (FGHI) est le produit scalaire du vecteur champ au milieu de cette face par le vecteur surface orienté vers l'extérieur du volume :

$$E_{x\left(x+\frac{dx}{2},y,z\right)} \cdot dy \cdot dz$$

Le flux du vecteur champ $\vec{E}$ à travers le rectangle (F'G'H'I') est le produit scalaire du vecteur champ au milieu de cette face par le vecteur surface orienté vers l'extérieur du volume :

$$-E_{x\left(x-\frac{dx}{2},y,z\right)} \cdot dy \cdot dz$$

La somme de ces deux flux du vecteur champ $\vec{E}$ à travers les deux rectangles (FGHI) et (F'G'H'I') vaut donc :

$$E_{x\left(x+\frac{dx}{2},y,z\right)} \cdot dy \cdot dz - E_{x\left(x-\frac{dx}{2},y,z\right)} \cdot dy \cdot dz = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x}\right) \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x}\right) \cdot d\tau$$

Le flux du vecteur champ $\overrightarrow{E}$ à travers les deux rectangles (FIF'I') et (GHH'G') se calcule de la même manière en permutant le rôle de x et y ; on obtient : $\left(\frac{\partial E_y}{\partial y}\right) \cdot d\tau$

Le flux du vecteur champ $\overrightarrow{E}$ à travers les deux rectangles (FGG'F') et (IHH'I') se calcule de la même manière en permutant le rôle de y et z ; on obtient : $\left(\frac{\partial E_z}{\partial z}\right) \cdot d\tau$

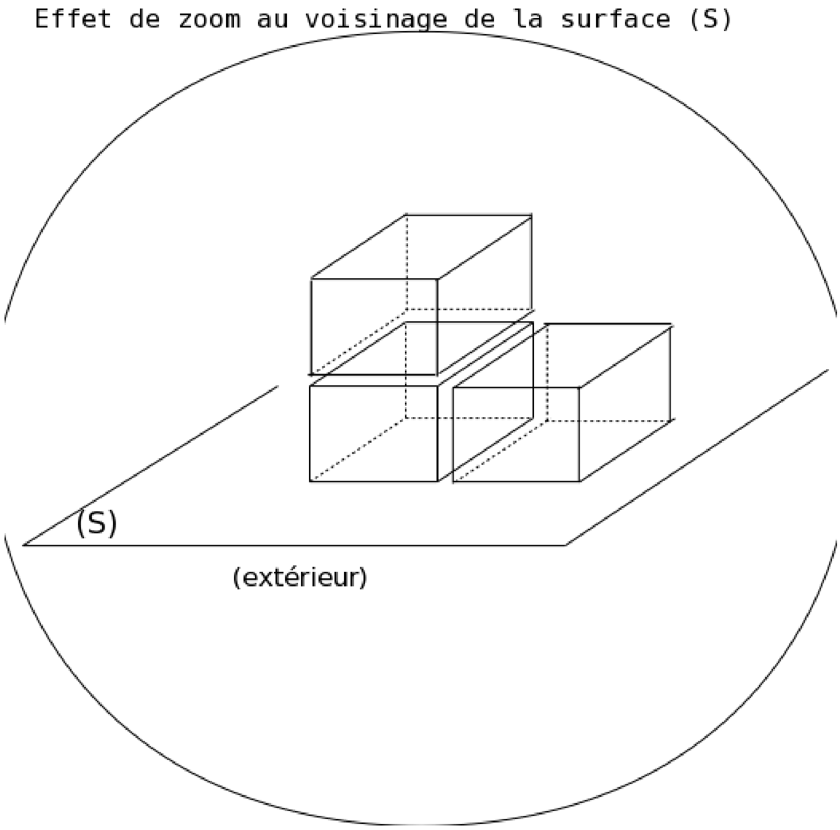
Le flux du vecteur champ $\overrightarrow{E}$ à travers les six faces (noté $d\Phi$) du parallélépipède rectangle est donc :

$$d\Phi = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) \cdot d\tau$$

Soit :

$$\boxed{d\Phi = div\left(\overrightarrow{E}\right) \cdot d\tau}$$

11 : Théorème d'Ostrogradski



Soit une surface fermée (S) délimitant un volume (τ) . On peut assimiler ce volume à une juxtaposition de volumes élémentaires tels que ceux décrits au paragraphe précédent. Soit J l'intégrale étendue au volume τ : $J = \iiint_{(\tau)} div\left(\overrightarrow{E}\right) \cdot d\tau$. D'après le résultat démontré au paragraphe précédent, J représente aussi la somme des flux du vecteur champ à travers les volumes élémentaires $d\tau$. Soit une surface élémentaire (rectangle (FIF'I') par exemple) ; deux cas sont alors possibles :

1° : cette surface élémentaire est à l'intérieur de la portion d'espace délimitée par (S) ; elle est alors commune à deux volumes élémentaires juxtaposés. Les deux flux à travers cette surface sont alors opposés compte tenu de la convention d'orientation des vecteurs surface vers l'extérieur des volumes délimités. Les flux à travers les surfaces élémentaires internes se compensent donc deux à deux et ne contribuent pas au flux total ;

2° : cette surface élémentaire appartient à (S). Elle doit être prise en compte dans le calcul du flux. Le flux élémentaire à travers cette surface est $d\Phi = \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dS}$: où $\overrightarrow{E}$ représente le vecteur champ en un point M de (S) et $\overrightarrow{dS}$ le vecteur surface élémentaire normal à (S) en M et orienté vers l'extérieur du volume.

Par identification, on obtient le ***théorème d'Ostrogradski*** : ***à un instant de date t fixée, le flux d'un vecteur champ à travers une surface fermée est égal à l'intégrale de la divergence de ce vecteur champ sur le volume délimité par la surface fermée.***

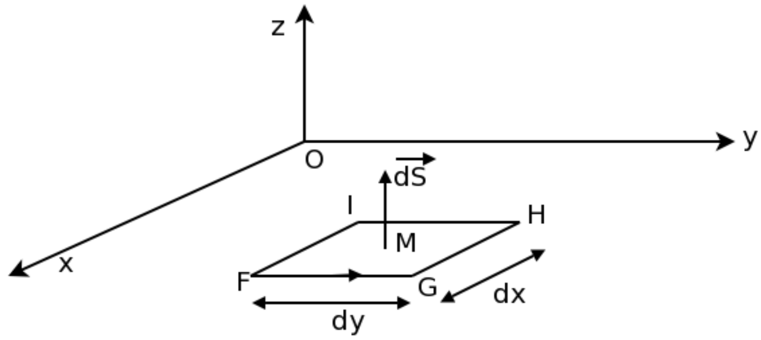
$$\boxed{\oiint_{(S)} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \iiint_{(\tau)} div\left(\overrightarrow{E}\right) \cdot d\tau}$$

12 : Rotationnel d'un champ vectoriel

On obtient le rotationnel du vecteur champ $\overrightarrow{E}$ en M en effectuant le produit vectoriel $\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{E}$, ce qui donne :

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{E}\right) = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix}}$$

13 : Propriété fondamentale du rotationnel d'un vecteur en un point M



Soit un contour élémentaire orienté, centré en M et caractérisé par un vecteur surface élémentaire $\overrightarrow{dS}$ normal au contour et orienté conformément à la règle du « tire-bouchon de Maxwell ». Il s'agit d'exprimer la circulation élémentaire $d\mathscr{C}$ du vecteur champ $\overrightarrow{E}$. Conformément au schéma ci-contre, on choisit d'abord le contour rectangulaire centré en M(x,y,z) de sommets F(x+dx/2,y-dy/2,z) G(x+dx/2,y+dy/2,z) H(x-dx/2,y+dy/2,z) I(x-dx/2,y-dy/2,z) tel que $\overrightarrow{dS} = dx \cdot dy \cdot \overrightarrow{u_z}$. La circulation du vecteur champ sur chaque côté du rectangle est égal au produit du vecteur champ au milieu de chaque côté par le vecteur déplacement correspondant.

$$d\mathscr{C} = E_{y(x+\frac{dx}{2},y,z)} \cdot dy - E_{x(x,y+\frac{dy}{2},z)} \cdot dx - E_{y(x-\frac{dx}{2},y,z)} \cdot dy + E_{x(x,y-\frac{dy}{2},z)} \cdot dx$$

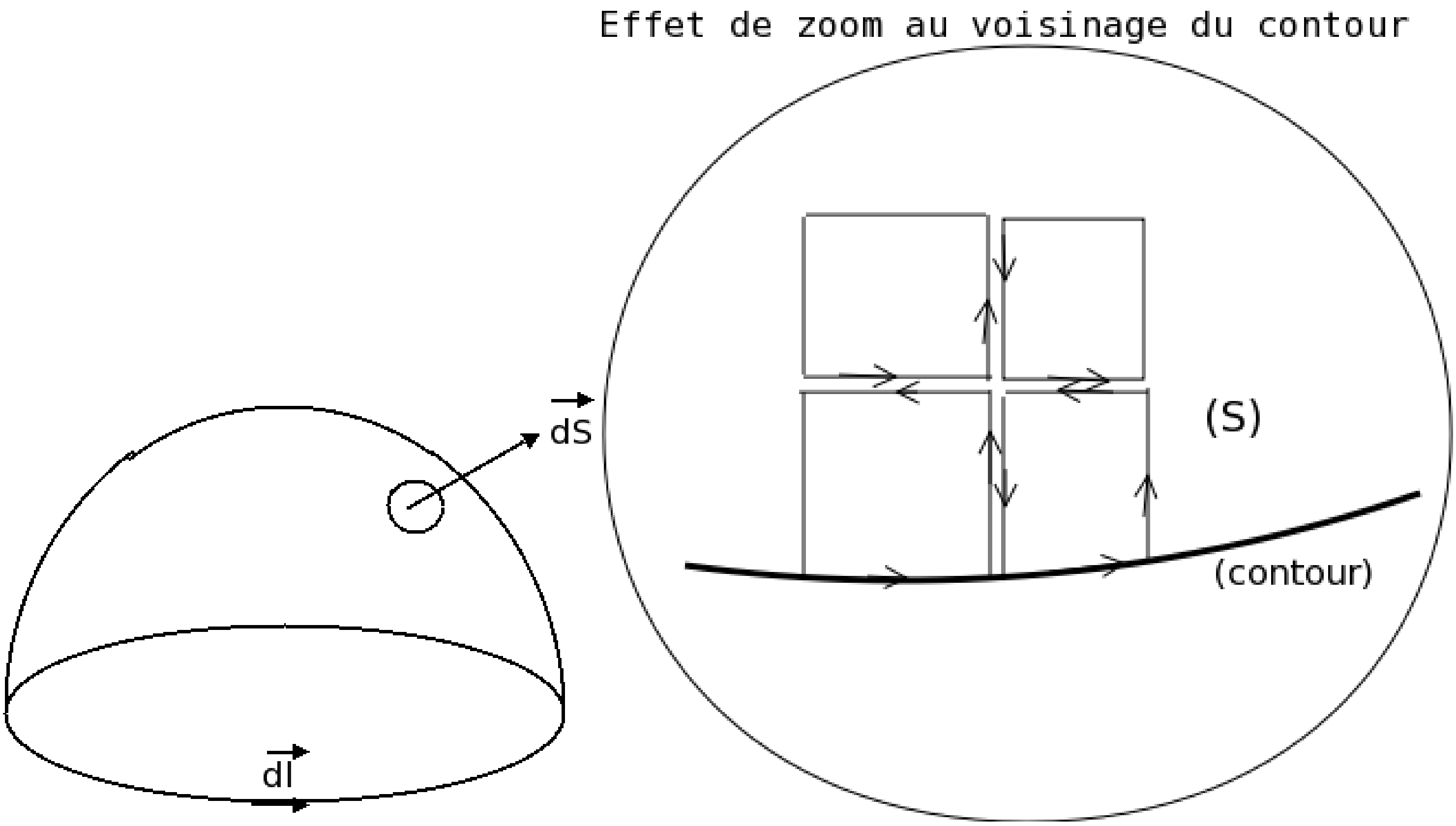
$$d\mathscr{C} = \left[E_{y(x+\frac{dx}{2},y,z)} - E_{y(x-\frac{dx}{2},y,z)}\right] \cdot dy - \left[E_{x(x,y+\frac{dy}{2},z)} - E_{x(x,y-\frac{dy}{2},z)}\right] \cdot dx$$

$$d\mathscr{C} = \frac{\partial E_y}{\partial x} \cdot dx \cdot dy - \frac{\partial E_x}{\partial y} \cdot dy \cdot dx$$

On remarque dans ce cas particulier : $d\mathscr{C} = \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{E}\right) \cdot \overrightarrow{dS}$. On peut faire un raisonnement analogue en modifiant l'orientation du contour, le vecteur $\overrightarrow{dS}$ devenant successivement colinéaire à $\overrightarrow{u_y}$ puis à $\overrightarrow{u_z}$. Cela revient à opérer des permutations circulaires entre x,y et z. Dans les trois cas, on obtient : $d\mathscr{C} = \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{E}\right) \cdot \overrightarrow{dS}$, ce qui permet de généraliser le résultat à un contour élémentaire d'orientation quelconque :

$$\boxed{d\mathscr{C} = \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{E}\right) \cdot \overrightarrow{dS}}$$

14 : Théorème de Stokes



Soit une surface quelconque (S) délimitée par un contour orienté (Γ) . Il est possible de considérer (S) comme une juxtaposition de contours élémentaires tel que celui étudié au paragraphe précédent. Il s'agit d'exprimer le flux du rotationnel du vecteur champ à travers la surface (S), c'est-à-dire d'établir une autre expression de l'intégrale J' étendue à la surface (S) :

$$J' = \iint_{(S)} \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{E}\right) \cdot \overrightarrow{dS}$$

En tenant compte du résultat établi au paragraphe précédent, J' est la somme des circulations élémentaires $d\mathscr{C}$. Soit un côté d'un rectangle élémentaire appartenant à (S). Deux cas sont possibles :

1° : ce côté n'appartient pas au contour (Γ) ; il est alors commun à deux contours voisins. La somme des deux circulations est donc nulle compte tenu de la convention d'orientation. Les côtés de ce type ne contribuent pas au calcul de la somme des circulations élémentaires puisqu'elles se compensent deux à deux.

2° : ce côté appartient au contour (Γ) ; seules les circulations correspondantes doivent être prises en compte dans le calcul de J'.

On obtient ainsi le **théorème de Stokes** : ***à un instant de date t fixée, la circulation d'un vecteur champ le long d'un contour orienté (Γ) est égal au flux du rotationnel de ce vecteur à travers une surface (S) délimitée par ce contour et orientée conformément à la règle du tire-bouchon de Maxwell.***

$$\boxed{\oint_{(\Gamma)} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dl} = \iint_{(S)} \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{E}\right) \cdot \overrightarrow{dS}}$$

15 : Laplacien d'un champ scalaire

Soit V = f(x,y,z) où (x,y,z) sont les coordonnées du point M. Le laplacien de V en M est :

$$\boxed{\triangle V = \overrightarrow{\nabla}^2 = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}}$$

16 : Laplacien vectoriel d'un champ vectoriel

Il s'agit d'un vecteur dont les trois composantes sont les trois laplaciens scalaires des trois coordonnées du vecteur champ en M. Ainsi le Laplacien vectoriel du vecteur champ $\overrightarrow{E}$ en M est :

$$\boxed{\overrightarrow{\triangle}\left(\overrightarrow{E}\right) = \begin{pmatrix} \triangle E_x \\ \triangle E_y \\ \triangle E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}}$$

17 : Champ vectoriel à circulation conservative

Un champ à circulation conservative est un champ de vecteurs dont la circulation le long de tout contour fermé est nulle.

$$\boxed{\mathscr{C} = \oint_{(\Gamma)} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dl} = 0 \quad \forall\,(\Gamma)}$$

Le théorème de Stokes conduit alors à : $\mathscr{C} = \iint_{(S)} \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{E}\right) \cdot \overrightarrow{dS} = 0$. Cette intégrale doit être nulle quelle que soit la surface (S) choisie. Cela implique :

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{E}\right) = \overrightarrow{0} \ \ \forall M}$$

Les propriétés du produit vectoriel permettent d'affirmer : $\overrightarrow{\nabla} \wedge \left(\overrightarrow{\nabla} V\right) = \overrightarrow{0}\ \forall M$ soit :

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}\,(V)\right) = \overrightarrow{0} \quad \forall M}$$

Conséquence : lorsque le rotationnel d'un vecteur $\overrightarrow{E}$ est égal en tout point au vecteur nul, ce vecteur champ dérive d'un potentiel scalaire V tel qu'en tout point M : $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}\,(V)$. Ce potentiel n'est pas unique, il est défini à une constante K près puisque : $\overrightarrow{grad}\,(V+K) = \overrightarrow{grad}\,(V)$. Finalement les trois propositions ci-dessous sont équivalentes :

$$\boxed{\overrightarrow{E} \text{ est à circulation conservative} \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{E}\right) = \overrightarrow{0} \quad \forall M \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}\,(V) \ \ \forall M}$$

18 : Champ vectoriel à flux conservatif

Un champ à flux conservatif est un champ tel que le flux du vecteur champ à travers toute surface fermée est nul.

$$\boxed{\Phi = \oiint_{(S)} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dS} = 0 \quad \forall (S)}$$

Si (τ) désigne le volume délimité par la surface fermée (S), le théorème d'Ostrogradski permet d'affirmer : $\Phi = \iiint_{(\tau)} div\left(\overrightarrow{B}\right) \cdot d\tau = 0\ \forall\,(\tau)$. Cette intégrale doit être nulle quel que soit le volume choisi. Cela implique :

$$\boxed{div\left(\overrightarrow{B}\right) = 0 \quad \forall M}$$

Les propriétés du produit mixte permettent d'affirmer : $\overrightarrow{\nabla} \cdot \left(\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A}\right) = 0$; soit :

$$\boxed{div\left(\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{A}\right)\right) = 0 \quad \forall M}$$

Conséquence : lorsque la divergence d'un vecteur $\overrightarrow{B}$ est nulle en tout point, ce vecteur dérive d'un potentiel vecteur $\overrightarrow{A}$ tel que $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{A}\right)$. Ce potentiel vecteur n'est pas défini de façon unique mais au gradient d'un champ scalaire φ près puisque $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{grad}\,(\varphi)\right) = \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{A}\right)$ en tout point M. Finalement les trois propositions ci-dessous sont équivalentes :

$$\boxed{\overrightarrow{B} \text{ est à flux conservatif} \quad \Longleftrightarrow \quad div\left(\overrightarrow{B}\right) = 0\,\forall M \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{B} = \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{A}\right) \ \forall M}$$

19 : Compositions d'opérateurs

Aux deux relations déjà établies :

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}\,(V)\right) = \overrightarrow{0} \quad \forall M}$$

$$\boxed{div\left(\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{A}\right)\right) = 0 \quad \forall M}$$

on peut ajouter les relations suivantes, toujours déduites des propriétés de l'opérateur nabla :
$\overrightarrow{\nabla} \cdot \left(\overrightarrow{\nabla} V\right) = \overrightarrow{\nabla}^2 V$ soit :

$$\boxed{div\left(\overrightarrow{grad}\,(V)\right) = \triangle V \quad \forall M}$$

$\overrightarrow{\nabla} \wedge \left(\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{E}\right) = \overrightarrow{\nabla}\left(\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{E}\right) - \overrightarrow{\nabla}^2 \overrightarrow{E}$ soit :

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{E}\right)\right) = \overrightarrow{grad}\left(div\left(\overrightarrow{E}\right)\right) - \overrightarrow{\triangle}\overrightarrow{E} \quad \forall M}$$

20 : Opérateurs appliqués à des produits

Soient U et V deux champs scalaires et $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ deux champs vectoriels. En tout point M de l'espace :

$$\overrightarrow{grad}\,(U \cdot V) = V \cdot \overrightarrow{grad}\,(U) + U \cdot \overrightarrow{grad}\,(V)$$

$$div\left(U \cdot \overrightarrow{A}\right) = \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{grad}\,(U) + U \cdot div\left(\overrightarrow{A}\right)$$

$$\overrightarrow{rot}\left(U \cdot \overrightarrow{A}\right) = \overrightarrow{grad}\,(U) \wedge \overrightarrow{A} + U \cdot \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{A}\right)$$

$$div\left(\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B}\right) = \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{A}\right) - \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{B}\right)$$

ANNEXE

Les schémas sont en début de fichier...

1 : Expressions en coordonnées cylindro-polaires (base $(\overrightarrow{u_r}\,,\ \overrightarrow{u_\theta}\,,\ \overrightarrow{u_z})$)

$$div\left(\overrightarrow{E}\right) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial\,(r \cdot E_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{E}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial \theta} - \frac{\partial E_\theta}{\partial z} \\ \\ \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \\ \\ \frac{1}{r} \cdot \left[\frac{\partial(r \cdot E_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \theta}\right] \end{pmatrix}$$

$$\triangle V = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial\left(r \cdot \frac{\partial V}{\partial r}\right)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

2 : Expressions en coordonnées sphériques (base $(\overrightarrow{u_r}\,,\ \overrightarrow{u_\theta}\,,\ \overrightarrow{u_\varphi})$)

$$div\left(\overrightarrow{E}\right) = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial\left(r^2 \cdot E_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r \cdot \sin(\theta)} \cdot \frac{\partial\left(\sin(\theta) \cdot E_\theta\right)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \cdot \sin(\theta)} \cdot \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{E}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r \cdot \sin(\theta)} \cdot \frac{\partial(\sin(\theta) \cdot E_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{1}{r \cdot \sin(\theta)} \cdot \frac{\partial E_\theta}{\partial \varphi} \\ \\ \frac{1}{r \cdot \sin(\theta)} \cdot \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(r \cdot E_\varphi)}{\partial r} \\ \\ \frac{1}{r} \cdot \left[\frac{\partial(r \cdot E_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \theta}\right] \end{pmatrix}$$

$$\triangle V = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial \left(r^2 \cdot \frac{\partial V}{\partial r} \right)}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \cdot \sin(\theta)} \cdot \frac{\partial \left(\sin(\theta) \cdot \frac{\partial V}{\partial \theta} \right)}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \cdot \sin(\theta)} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}$$

retour à la page principale