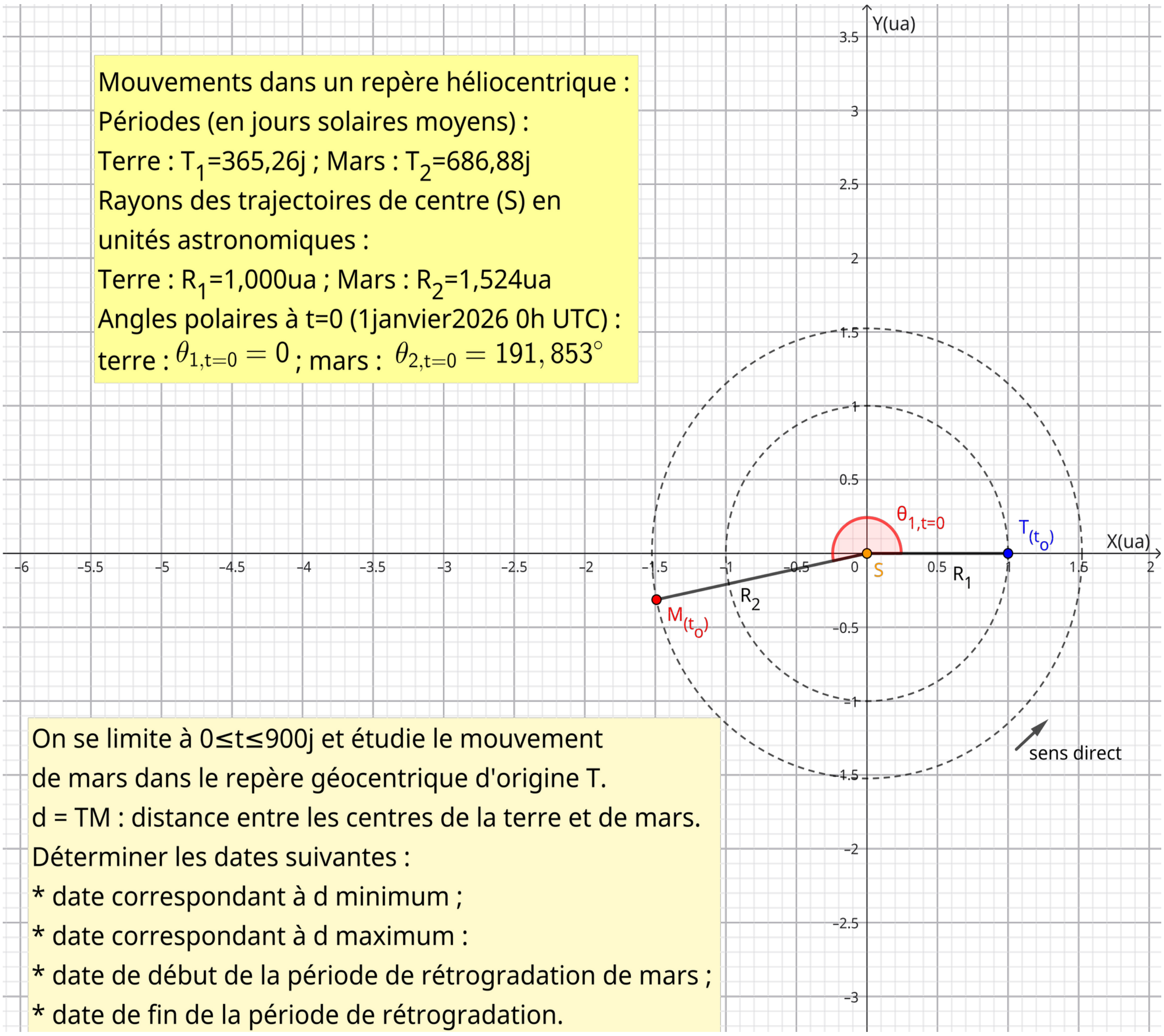
RÉTROGRADATION DE MARS

Présentation du problème :

Imaginons un observateur fictif situé au centre de la terre et regardant dans une direction fixe par rapport à un système d'étoiles suffisamment éloignées du système solaire pour être considérées comme fixes (observateur fixe dans un repère géocentrique). Tous les 780 jours environ, il observe un comportement étonnant de la planète mars. Pendant une durée de 70 jours environ, englobant la date correspondant à un minimum de la distance terre – mars, mars semble changer de sens de rotation : son angle polaire mesuré dans le repère géocentrique qui, pendant la majorité du temps, augmente dans le sens direct, se met à diminuer. Cette diminution temporaire est appelée « rétrogradation ». Voici une étude très simplifiée du phénomène.



Mouvements dans le repère héliocentrique :
vitesses angulaires de T (indice 1) et de M (indice 2) :

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = 0{,}0172\, rad/j \quad ; \quad \omega_2 = \frac{2\pi}{T_2} = 0{,}00915\, rad/j$$

Ainsi, l'augmentation de $(\theta_1 - \theta_2)$ par jour est $(\omega_1 - \omega_2)$ (mesure en rad/j). Ainsi, à chaque fois que $(\theta_1 - \theta_2)$ augmente de 2π rad, donc à chaque fois que t augmente de $\frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2}$, les trois centres S,T et M se retrouvent dans la même position relative. On peut parler de périodicité de la configuration relative de ces trois centres, la période étant :

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2} = 780{,}1\, j$$

angle polaire initial de M : $\varphi = \theta_{1,t=0} = 191{,}853\,° = 191{,}853 \cdot \frac{\pi}{180} = 3{,}348\, rad$

Date correspondant à d=TM minimale : cette date correspond à des vecteurs $\overrightarrow{ST}$ et $\overrightarrow{SM}$ colinéaires et de même sens. Si, pendant cette durée t_{min} M tourne de θ_2 ,T doit tourner de $\theta_1 = \theta_2 + \pi$. Donc :

$$t_{min} = \frac{\varphi}{\omega_1 - \omega_2} = 415{,}72\, j$$

Dates correspondant à d maximale : cette date correspond à des vecteurs $\overrightarrow{ST}$ et $\overrightarrow{SM}$ colinéaires et de sens opposés. Si, pendant cette durée t_{1max} M tourne de θ_2 ,T doit tourner de $\theta_1 = \varphi - \pi$. Donc :

$$t_{1max} = \frac{\varphi - \pi}{\omega_1 - \omega_2} = 25{,}7\, j$$

Compte tenu de l'intervalle d'étude et de la périodicité définie précédemment, la date (t_{1max} +T_p) correspond aussi à un maximum de d=TM.

$$t_{2max} = t_{1max} + T_p = 805{,}8\, j$$

$\overrightarrow{TM} = \overrightarrow{SM} - \overrightarrow{ST}$; les composantes de ce vecteur sont :
$X = R_2 \cdot \cos(\theta_2) - R_1 \cdot \cos(\theta_1) \quad ; \quad Y = R_2 \cdot \sin(\theta_2) - R_1 \cdot \sin(\theta_1)$

Mouvement de M dans le repère géocentrique :

C'est un repère d'origine T en translation par rapport au repère héliocentrique. (X,Y) représentent donc dans ce nouveau repère les coordonnées de M. L'angle polaire θ de M dans ce repère vérifie donc :
$\tan(\theta) = \frac{Y}{X}$ (pas d'ambiguïté à π près sur θ puisque nous travaillons au voisinage de la situation correspondant au minimum de la distance d=TM). La fonction tangente étant monotone croissante, le signe de $\frac{d\theta}{dt}$ est celui de $\frac{d[\tan(\theta)]}{dt}$; ce signe est celui de $\Delta = Y'.X - X'.Y$; je calcule les dérivées par rapport au temps :

$$X' = -R_{2.}\omega_{2.}\sin(\theta_2) + R_{1.}\omega_{1.}\sin(\theta_1)$$
$$Y' = R_{2.}\omega_{2.}\cos(\theta_2) - R_{1.}\omega_{1.}\cos(\theta_1)$$

Sachant que :

$$\sin^2(\theta_2) + \cos^2(\theta_2) = \sin^2(\theta_1) + \cos^2(\theta_1) = 1$$
$$\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) + \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) = \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

après calcul, on obtient :

$$\Delta = R_{2.}^2\omega_2 + R_{1.}^2\omega_1 - R_1.R_2.(\omega_1 + \omega_2).\cos(\theta_1 - \theta_2)$$

Il y a ainsi rétrogradation pour Δ<0 soit :

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) > \frac{R_{2.}^2\omega_2 + R_{1.}^2\omega_1}{R_1.R_2.(\omega_1 + \omega_2)}$$

Posons : $\Phi = \arccos\frac{\left(R_{2.}^2\omega_2 + R_{1.}^2\omega_1\right)}{\left(R_1.R_2.(\omega_1 + \omega_2)\right)} = 0{,}293\, rad$; la condition précédente devient :
$-\Phi + 2k\pi < \theta_1 - \theta_2 < \Phi + 2k\pi$ avec k entier relatif, soit, avec $\theta_1 - \theta_2 = (\omega_1 - \omega_2)t - \varphi$:

$$\frac{-\Phi+2k\pi+\varphi}{\omega_1-\omega_2}<t<\frac{\Phi+2k\pi+\varphi}{\omega_1-\omega_2}$$ ou encore : $$t_{min}-\frac{\Phi-2k\pi}{\omega_1-\omega_2}<t<t_{min}+\frac{\Phi+2k\pi}{\omega_1-\omega_2}$$

Cette formule appelle plusieurs remarques :
1° : les dates de début et de fin de la période de rétrogradation sont deux valeurs « symétriques » par rapport à la date correspondant au minimum de la distance TM.
2° : la durée de la rétrogradation est :

$$\Delta T=\frac{2\Phi}{\omega_1-\omega_2}=72{,}7\ j$$

Le phénomène se reproduit périodiquement ; la période est : $T_p=\frac{2\pi}{\omega_1-\omega_2}=780\ j\ .;$ Nous retrouvons heureusement la période définie au début de cette étude.
Sur l'intervalle d'étude : k=0 ; les dates de début et de fin de la rétrogradations sont ainsi :

$$t_{deb}=379{,}4\ j \quad ; \quad t_{fin}=452{,}1\ j$$

Conclusion :
Cette étude est bien sûr très simplifiée par rapport à la réalité pour plusieurs raisons :
1° les trajectoires ne sont pas tout à fait coplanaires : le plan de la trajectoire de mars est incliné de 1,85° par rapport à l'écliptique : plan contenant la trajectoire de la terre dans le repère héliocentrique ;
2° les trajectoires dans le repère héliocentrique ne sont pas tout à fait circulaires, ce sont des ellipses. Si l'excentricité de la trajectoire de la terre est très faible (e=0,0167), celle de la trajectoire de mars est d'influence non négligeable (e=0,0935)
Remarque :
Cette particularité du mouvement de M s'explique par le fait que, dans ce repère géocentrique, la principale force responsable du mouvement de M : l'attraction gravitationnelle exercée par le soleil, s'exerce à partir d'un point S en mouvement circulaire uniforme ; on ne peut qualifier cette force de force centrale, contrairement à la situation observée dans le repère héliocentrique.