

Choc de deux boules de billard

Résumé

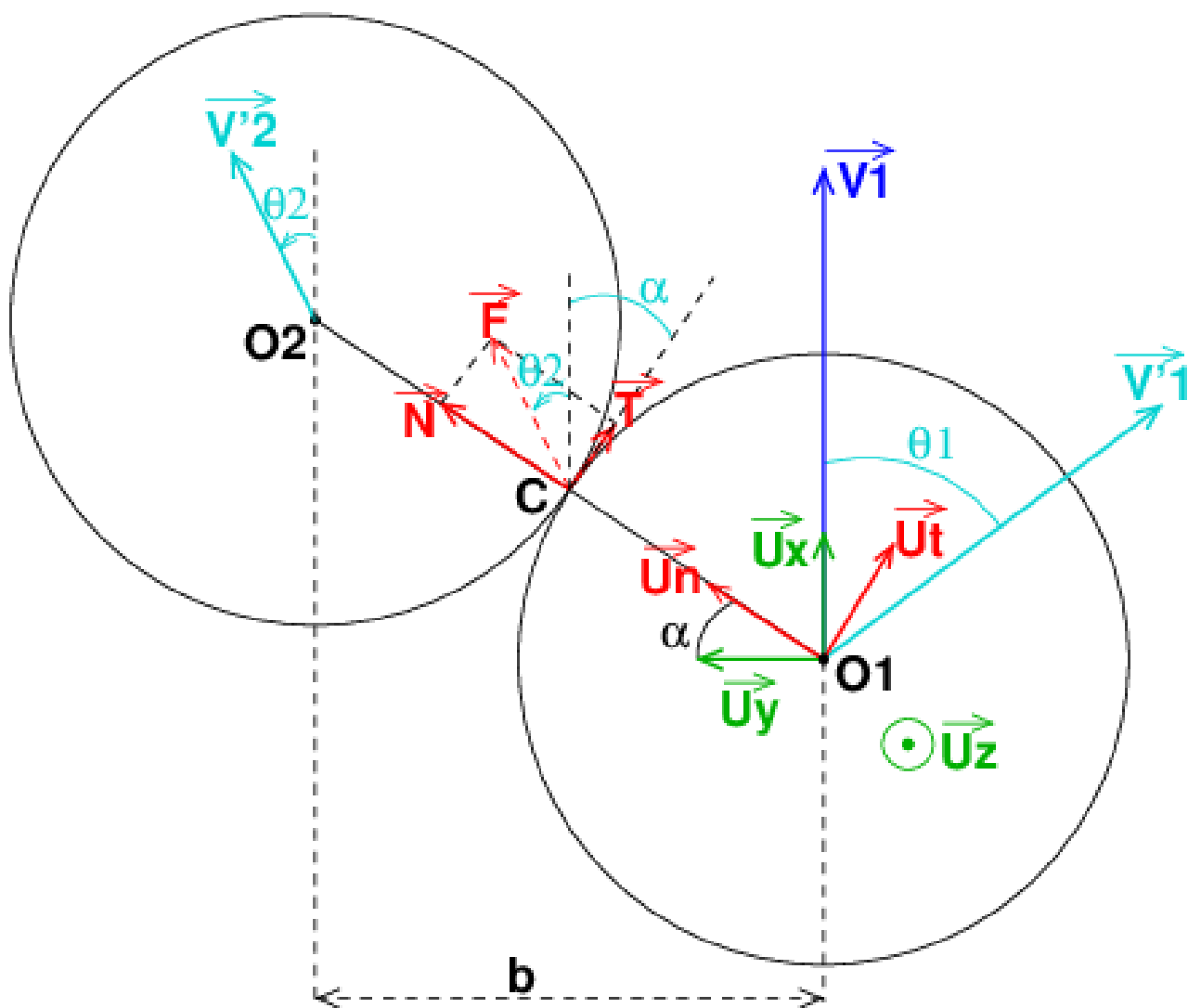
Il s'agit de modéliser le choc de deux billes de billard identiques en s'intéressant en particulier aux directions des vitesses des deux boules juste après le choc. La théorie simplifiée habituellement présentée, reposant sur la conservation de la quantité de mouvement et la conservation de l'énergie cinétique, conduit à deux situations :

- * soit le choc est frontal : la boule incidente s'immobilise et l'autre boule acquiert la vitesse de la boule incidente ;
- * soit le choc n'est pas frontal : les deux boules s'éloignent l'une de l'autre de sorte que leurs centres possèdent deux vecteurs vitesse orthogonaux.

L'expérience ne vérifie pas cette théorie : l'angle entre les deux vecteurs vitesses dépend du paramètre d'impact et varie de façon continue en restant toujours inférieur à 90° . **Il va s'agir ici, très modestement, de chercher à améliorer la théorie sans pour autant prétendre faire le tour d'un problème très complexe.**

Présentation du problème

Les deux boules de billard sont identiques, de masse m , de rayon R , de centres respectifs O_1 et O_2 . Leurs mouvements sont étudiés par rapport à la table de billard considérée comme un référentiel galiléen. Les deux boules sont homogènes : le moment d'inertie d'une boule par rapport à un de ses diamètres est ainsi : $J = \frac{2}{5}m.R^2$.



La boule n° 2 est initialement immobile ; la boule n°1 est initialement animée d'un mouvement de roulement sans glissement : la vitesse de son centre O_1 est $\vec{V}_1 = V_1 \cdot \vec{U}_x$. Le paramètre d'impact b est précisé sur le schéma. On peut remarquer : $\cos(\alpha) = \frac{b}{2R}$ avec $0 \leq b < 2R$. Avant le choc, le vecteur rotation propre de la bille n° 1 est, en supposant le roulement sans glissement :

$$\vec{\Omega}_1 = \frac{V_1}{R} \cdot \vec{U}_y \quad (1)$$

À l'instant de date $t = 0$ du choc en C, la vitesse de C considéré comme appartenant à la boule n° 1 est :

$$\vec{V}_C = \vec{V}_1 + \vec{\Omega}_1 \wedge \overrightarrow{O_1C} = V_1 \cdot \vec{U}_x + V_1 \cdot \vec{U}_y \wedge \vec{U}_n \quad (2)$$

$$\vec{U}_x = \cos(\alpha) \cdot \vec{U}_t + \sin(\alpha) \cdot \vec{U}_n \quad ; \quad \vec{U}_y = -\sin(\alpha) \cdot \vec{U}_t + \cos(\alpha) \cdot \vec{U}_n \quad (3)$$

$$\vec{V}_C = V_1 \cdot \left[\cos(\alpha) \cdot \vec{U}_t + \sin(\alpha) \cdot \vec{U}_n - \sin(\alpha) \cdot \vec{U}_z \right] \quad (4)$$

Le point C, considéré comme appartenant à la bille n°2 étant immobile, la vitesse de glissement en C de la boule n°1 par rapport à la boule n° 2 à la date $t = 0$ est la somme des deux composantes tangentielles de la vitesse qui vient d'être calculée :

$$\vec{V}_g = V_1 \cdot \left[\cos(\alpha) \cdot \vec{U}_t - \sin(\alpha) \cdot \vec{U}_z \right] \quad (5)$$

Conditions d'étude de la collision

On considère celle-ci quasi instantanée : elle s'effectue entre les instants **très rapprochés** de dates $t=0$ et $t = \Delta t$ de sorte que les centres des deux boules ont des déplacements négligeables entre ces instants. Entre ces deux instants, les actions normales du tapis compensent les poids des boules et les réactions tangentielles du tapis sont d'influence négligeable : on peut ainsi considérer le système constitué des deux boules comme pseudo isolé : la quantité de mouvement totale du système se conserve au cours de la collision.

Négliger ainsi l'influence des réactions tangentielles du tapis sur les deux boules implique la conservation du moment cinétique de chaque boule par rapport à son centre. À la date $t=\Delta t$, la vitesse de rotation propre de la bille n° 1 est toujours $\Omega_1 = \frac{V_1}{R}$ et la vitesse de rotation propre de la bille n° 2 est nulle. La condition de roulement sans glissement n'est satisfaite pour **aucune** des deux boules : pour $t>\Delta t$, chaque boule sera soumise à une réaction tangentielle du tapis qui conduira à une annulation progressive de sa vitesse de glissement par rapport au tapis. Ces mouvements de glissement seront étudiés en fin de document car ils n'affecte pas les directions des trajectoires qui restent celles des vecteurs vitesses \vec{V}_1' et \vec{V}_2' déterminées à la date $t=\Delta t$.

Remarque : entre les instants de dates $t=0$ et $t = \Delta t$, le vecteur moment cinétique en O_1 de la boule n° 1, conserve sa norme comme écrit ci-dessus mais tourne de l'angle θ_1 sous l'action d'un couple de forces exercé par le tapis. Nous n'explicitons pas ce couple et supposons qu'il n'influence pas la valeur de l'angle θ_1 . Cette hypothèse simplificatrice constitue sans doute le principal point faible de cette étude ...

Étude dynamique de la boule n° 2 pendant la collision

La boule n°1 exerce sur la boule n°2 une force de contact en C qui admet les composantes suivantes :

1° : une composante normale : $\vec{N} = N \cdot \vec{U}_n$;

2° : une composante tangentielle ayant la direction et le sens du vecteur vitesse de glissement précédent :

$$\vec{T}_1 = T_1 \cdot \cos(\alpha) \cdot \vec{U}_t - T_1 \cdot \sin(\alpha) \cdot \vec{U}_z \quad (6)$$

La composante horizontale de cette force : $\vec{T} = T_1 \cdot \cos(\alpha) \cdot \vec{U}_t$ est représenté sur le schéma. La composante verticale n'est pas schématisée, elle est compensée par l'action verticale du tapis. Cette action normale ascendante : $\vec{R}_s = R_s \cdot \vec{U}_z$ compense donc le poids de la boule et la composante verticale de la force précédente : $R_s = m \cdot g + T_1 \sin(\alpha)$.

Ainsi, seules les composantes horizontales des forces exercées pendant le choc interviennent dans la détermination de \vec{V}_2' .

La relation fondamentale de la dynamique appliquée à la boule n° 2, intégrée entre les instants très rapprochés de dates $t=0$ et $t = \Delta t$, conduit à :

$$m \cdot \vec{V}_2' = \left(\vec{N} + \vec{T} \right) \cdot \Delta t = \vec{F} \cdot \Delta t \quad (7)$$

Ainsi : **la direction du vecteur vitesse de O2 est la direction du vecteur \vec{F} .**

Si on note f le coefficient de frottement dynamique entre les deux boules, la loi de Coulomb conduit à :

$$T_1 = f \cdot N \quad \text{soit} \quad T = f \cdot N \cdot \cos(\alpha) \quad (8)$$

La relation vectorielle : $\vec{F} = \vec{N} + \vec{T}$ conduit simplement à :

$$\frac{N}{T} = \tan(\alpha + \theta_2) = \frac{\tan(\alpha) \cdot \tan(\theta_2)}{1 - \tan(\alpha) \cdot \tan(\theta_2)} \quad \text{avec} \quad \frac{N}{T} = \frac{1}{f \cdot \cos(\alpha)} \quad (9)$$

Après simplification :

$$\boxed{\tan(\theta_2) = \frac{1}{f \cdot \sin(\alpha) + \tan(\alpha)}} \quad (10)$$

Remarque : l'absence de frottement ($f=0$) conduit à $\alpha + \theta_2 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$: le vecteur \vec{V}_2' est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{O_1O_2}$.

Étude dynamique de la boule n° 1

En tenant compte du principe des actions réciproques, nous pouvons intégrer la relation fondamentale de la dynamique entre les instants très rapprochés de dates $t=0$ et $t = \Delta t$:

$$m.\vec{V}'_1 - m.\vec{V}_1 = -(\vec{N} + \vec{T}) \cdot \Delta t = -\vec{F} \cdot \Delta t \quad (11)$$

En tenant compte de (7), on obtient :

$$m.\vec{V}'_1 - m.\vec{V}_1 = -m.\vec{V}'_2 \quad \text{soit} \quad \vec{V}'_1 = \vec{V}_1 - \vec{V}'_2 \quad (12)$$

Remarque : cette relation traduit la conservation de la quantité de mouvement du système formé des deux boules entre les instants de dates $t=0$ et $t=\Delta t$.

En projetant cette relation vectorielle dans la base (\vec{U}_x, \vec{U}_y) , on obtient :

$$\begin{cases} V'_1 \cdot \cos(\theta_1) = V_1 - V'_2 \cdot \cos(\theta_2) \\ V'_1 \cdot \sin(\theta_1) = V'_2 \cdot \sin(\theta_2) \end{cases} \quad (13)$$

Influence du coefficient de restitution : règle des collisions de Newton

Imaginons une bille abandonnée sans vitesse initiale à une hauteur h d'une plaque horizontale en marbre. Les mesures des différentes hauteurs atteintes après les rebonds successifs montre qu'à chaque choc de la bille sur la plaque, la vitesse de la bille change de sens, la norme du vecteur vitesse étant multipliée par un réel e inférieur à 1, appelé coefficient de restitution. Le cas limite $e = 1$ correspondrait à un choc parfaitement élastique. Newton a généralisé ce résultat aux collisions entre boules de la façon suivante : la collision inverse le sens de la vitesse relative radiale d'une boule par rapport à l'autre, la norme de cette vitesse relative radiale étant multiplié par e . Par vitesse radiale, il faut comprendre : projeté du vecteur vitesse relative sur un axe passant par la ligne des centres. En appliquant cette relation à la vitesse relative de la bille 2 par rapport à la bille 1, cela donne :

$$(\vec{V}'_2 - \vec{V}'_1) \cdot \vec{U}_n = -e \cdot (\vec{0} - \vec{V}_1) \cdot \vec{U}_n = e \cdot \vec{V}_1 \cdot \vec{U}_n$$

Soit :

$$V'_2 \cdot \sin(\alpha + \theta_2) + V'_1 \cdot \sin(\theta_1 - \alpha) = e \cdot V_1 \cdot \sin(\alpha) \quad (14)$$

Résultats

La valeur du coefficient de frottement entre les deux boules varient d'une marque à l'autre mais ne dépasse jamais 0,03. Afin de savoir s'il était possible de simplifier les relations précédentes en posant $f = 0$, j'ai calculé la valeur de θ_2 fournie par la relation (10) en posant $f = 0,03$ et je l'ai comparée à la valeur simplifiée : $\theta_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha$. L'écart relatif dépend de la valeur de α mais reste toujours inférieur à 1,3%. Par la suite, je vais donc poser :

$$\boxed{f = 0 \quad ; \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha} \quad (15)$$

Dans ces conditions, les relations (13) et (14) se simplifient :

$$\begin{cases} V'_1 \cdot \cos(\theta_1) = V_1 - V'_2 \cdot \sin(\alpha) \\ V'_1 \cdot \sin(\theta_1) = V'_2 \cdot \cos(\alpha) \\ V'_2 + V'_1 \cdot \sin(\theta_1 - \alpha) = e \cdot V_1 \cdot \sin(\alpha) \end{cases} \quad (16)$$

En développant le sinus de la troisième équation puis en tenant compte des deux premières équations :

$$V'_2 + V'_1 \cdot (\sin(\theta_1) \cdot \cos(\alpha) - \cos(\theta_1) \cdot \sin(\alpha)) = e \cdot V_1 \cdot \sin(\alpha)$$

$$V'_2 \cdot [1 + \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)] - V_1 \cdot \sin(\alpha) = e \cdot V_1 \cdot \sin(\alpha)$$

D'où :

$$\boxed{V'_2 = V_1 \cdot \sin(\alpha) \cdot \frac{1+e}{2}} \quad (17)$$

En effectuant la « division membre à membre » des deux premières relations (16) puis en tenant compte de (17) :

$$\tan(\theta_1) = \frac{V'_2 \cdot \cos(\alpha)}{V_1 - V'_2 \cdot \sin(\alpha)} = \frac{\cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha) \cdot \frac{1+e}{2}}{1 - \sin^2(\alpha) \cdot \frac{1+e}{2}}$$

$$\boxed{\tan(\theta_1) = \frac{\cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha)}{\frac{2}{1+e} - \sin^2(\alpha)}} \quad (18)$$

Connaissant la valeur de V_2 et la valeur de θ_1 , il est facile d'obtenir numériquement la valeur de V_1 . En revanche, son expression littérale est assez laborieuse à obtenir.

Remarque : le cas particulier $e = 1$ correspond au choc élastique ; la relation (18) conduit dans ce cas à $\theta_1 = \alpha$ et, en tenant compte de (15), à $\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2} rad$. On obtient bien les résultats classiques : le vecteur \vec{V}_2' est colinéaire à la ligne des centres ($O_1 O_2$) et les vecteurs \vec{V}_1' et \vec{V}_2' sont orthogonaux.

Il peut s'avérer également prudent de tester les résultats précédents dans le cas d'un choc frontal non élastique. Pour un tel choc : $\alpha = \frac{\pi}{2} rad$. Cela conduit (heureusement !) à $\theta_2 = 0$. La relation (17) conduit à :

$$V_2' = V_1 \left(\frac{1+e}{2} \right)$$

Les relations (16), combinées à la relation précédente, conduisent à :

$$\begin{cases} V_1' \cdot \cos(\theta_1) = V_1 - V_2' = V_1 \cdot \frac{1-e}{2} \\ V_1' \cdot \sin(\theta_1) = 0 \end{cases}$$

Cela conduit à :

$$\theta_1 = 0 \quad ; \quad V_1' = V_1 \cdot \frac{1-e}{2}$$

Le centre O_1 de la boule n°1 garde une vitesse ayant même direction et même sens que sa vitesse avant le choc mais cette vitesse est très faible.

On peut aussi se poser la question de la conservation ou non de l'énergie cinétique lors du choc, entre les instants de dates $t=0$ et $t = \Delta t$. La conservation de la vitesse de rotation propre de la bille n° 1 implique la conservation de son énergie cinétique de rotation. La boule n° 2 n'ayant pas encore de rotation propre possède uniquement une énergie cinétique de translation. Finalement :

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m \cdot (V_1'^2 + V_2'^2 - V_1^2) \quad (19)$$

La variation relative est ainsi ;

$$\Delta E_{cR} = \frac{V_1'^2 + V_2'^2 - V_1^2}{V_1^2} = \frac{V_1'^2 + V_2'^2}{V_1^2} - 1 \quad (20)$$

Dans le cas particulier du choc frontal :

$$\Delta E_{cR} = \left(\frac{1+e}{2} \right)^2 + \left(\frac{1-e}{2} \right)^2 - 1 = \frac{e^2 - 1}{2} \quad (21)$$

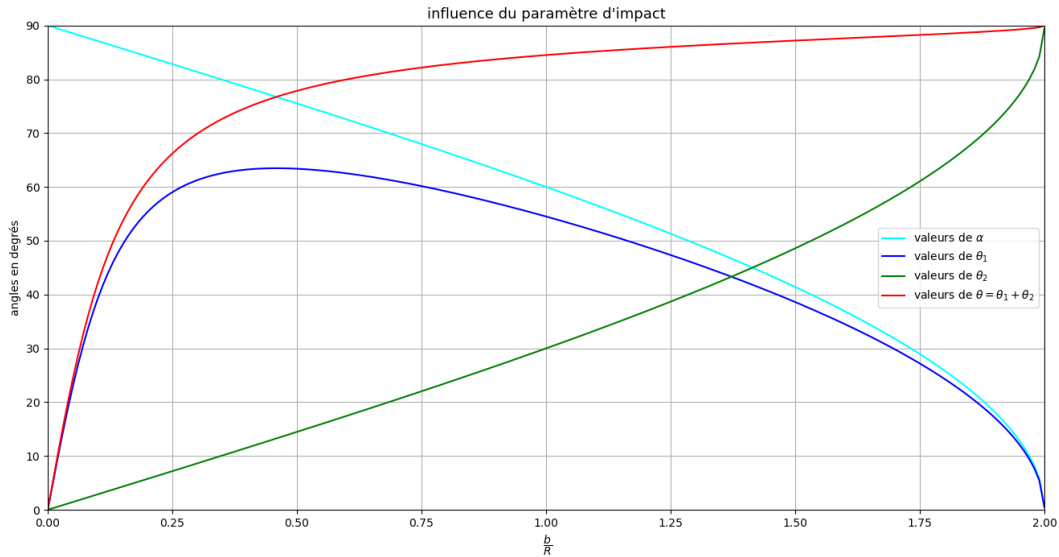
Puisque $e < 1$, $\Delta E_{cR} < 0$: **le choc non élastique frontal s'effectue avec perte d'énergie cinétique et très logiquement : le cas $e=1$ correspond à la conservation de l'énergie cinétique.** Pour un choc non frontal, il y a aussi perte d'énergie cinétique ; cette perte sera étudiée graphiquement plus loin.

Influence de e sur l'angle entre les deux vecteurs vitesses après le choc. La valeur couramment admise est $e = \frac{8}{9}$. Pour cette valeur, je m'intéresse à l'évolution de θ_1 , θ_2 , $\theta = \theta_1 + \theta_2$ en fonction de $\frac{b}{R}$, ce rapport étant susceptible de varier entre zéro et deux. Voici les courbes obtenues. Quelques remarques :

1° : la théorie « classique » fait apparaître une discontinuité de θ en $b = 0$ puisque $\theta = 0$ pour le choc frontal et $\theta = \frac{\pi}{2} rad$ dès que le choc n'est plus frontal en $b > 0$; cette anomalie disparaît dans ce modèle plus réaliste introduisant un coefficient de restitution un peu inférieur à 1.

2° : pour un choc non frontal, l'angle θ reste toujours inférieur à $\frac{\pi}{2} rad$; ce résultat est conforme à l'expérience.

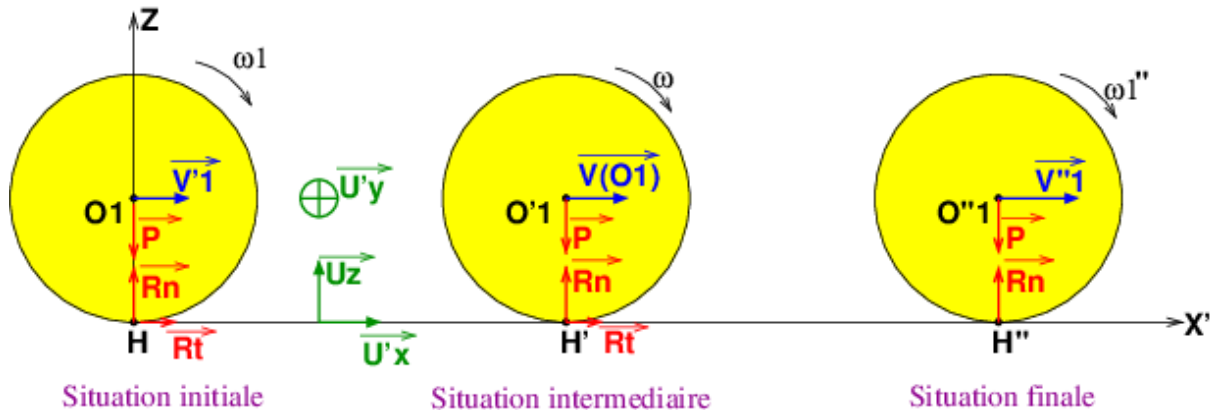
3° : c'est aux faibles valeurs de b que l'écart de comportement par rapport au cas du choc élastique est le plus important, cet écart devenant faible quand b se rapproche de sa valeur maximale $2R$.



Perte d'énergie cinétique au cours du choc La variation relative d'énergie cinétique au cours du choc, due à un coefficient de restitution inférieur à un, a été définie formule (20) : voici en dessous la courbe (en bleu) représentant (en pourcentage) la diminution relative d'énergie cinétique ($-\Delta E_{cR}$) en fonction de (b/R) . Il y a toujours diminution d'énergie cinétique puisque le choc n'est pas rigoureusement élastique. Là encore, l'écart le plus important avec le résultat obtenu pour un choc élastique correspond au très faibles valeurs de b (diminution de 10,5% pour un choc frontal).

Évolution des mouvements des boules pour $t > \Delta t$

Cas de la boule n° 1



La situation initiale correspond à l'instant de date $t = \Delta t$ de l'étude principale avec $\omega_1 = \frac{V_1}{R}$. La situation finale correspond à l'absence de glissement soit à une vitesse de rotation instantanée : $\omega''_1 = \frac{V''_1}{R}$. Appliquons à la boule le théorème de Kőning concernant le moment cinétique de la boule au point fixe H sachant que H est l'origine du repère galiléen $(Hx'y'z)$, l'axe (Hx) appartenant au plan du tapis horizontal et étant parallèle à la trajectoire du centre.

$$\frac{1}{m} \cdot \vec{L}_H = \vec{HO}_1' \wedge \vec{V}_{O_1'} + \frac{2}{5} R^2 \cdot \omega_1 \cdot \vec{u}_y$$

Sachant que H est fixe, le moment dynamique en H est la dérivée par rapport au temps du moment cinétique en H. Le théorème du moment dynamique conduit à :

$$\frac{1}{m} \cdot \frac{d\vec{L}_H}{dt} = \vec{HH}' \wedge (\vec{R}_n + \vec{R}_t) + \vec{HO}_1' \wedge \vec{P}$$

Sachant que $\vec{HO}_1' = \vec{HH}' + \vec{H'O}_1'$ et que $\vec{R}_n + \vec{P} = \vec{0}$, on obtient après simplification :

$$\frac{1}{m} \cdot \frac{d\vec{L}_H}{dt} = \vec{HH}' \wedge \vec{R}_t = \vec{0}$$

Le moment cinétique en H se conserve : il est identique à l'état initial et à l'état final :

$$R \cdot V_1' + \frac{2}{5} R^2 \cdot \omega_1 = R \cdot V_1'' + \frac{2}{5} R^2 \cdot \omega_1'' \quad (22)$$

Soit en simplifiant et en tenant compte des valeurs des vitesses de rotation :

$$V_1' + \frac{2}{5}V_1 = V_1'' + \frac{2}{5}V_1'' = \frac{7}{5}V_1''$$

$$V_1'' = \frac{5}{7}V_1' + \frac{2}{7}V_1$$

La boule accélère pendant cette phase de glissement, ce qui paraît logique puisque la vitesse du centre a la direction et le sens de l'action tangentielle du tapis sur la boule.

Cas de la boule n° 2

L'étude est analogue à la précédente en plus simple puisque la vitesse de rotation initiale est nulle. La vitesse de rotation finale correspond à un roulement sans glissement : $\omega_2'' = \frac{V_2''}{R}$. L'adaptation de la formule (22) conduit à :

$$R.V_2' + 0 = R.V_2'' + \frac{2}{5}R^2.\omega_2'' = R.V_2'' + \frac{2}{5}R^2 \cdot \frac{V_2''}{R} = \frac{7}{5}R.V_2''$$

$$V_2'' = \frac{5}{7}V_2'$$

La boule ralentit ; en effet, dans ce cas, la vitesse du centre et l'action tangentielle du tapis sont de sens opposés.

Remarque 1 : Cette étude suppose, après la phase de glissement, un mouvement de roulement sans glissement de vitesse constante puisque l'action tangentielle du tapis est devenue égale au vecteur nul. En réalité, on observe un ralentissement d'accélération très faible. Le frottement dû à l'air étant totalement négligeable à de si faibles vitesses, on peut tenir compte de ce faible ralentissement en considérant que le tapis, en se déformant légèrement au passage de chaque boule, exerce sur elle une force constante de très faible intensité ayant la direction du vecteur vitesse du centre et un sens opposé. Une étude prenant en compte cette force est présentée sur une autre fiche concernant le roulement d'une balle de golf sur un green. Fiche disponible ici (partie I) : https://www.vanoise49.fr/roulement_golf.pdf

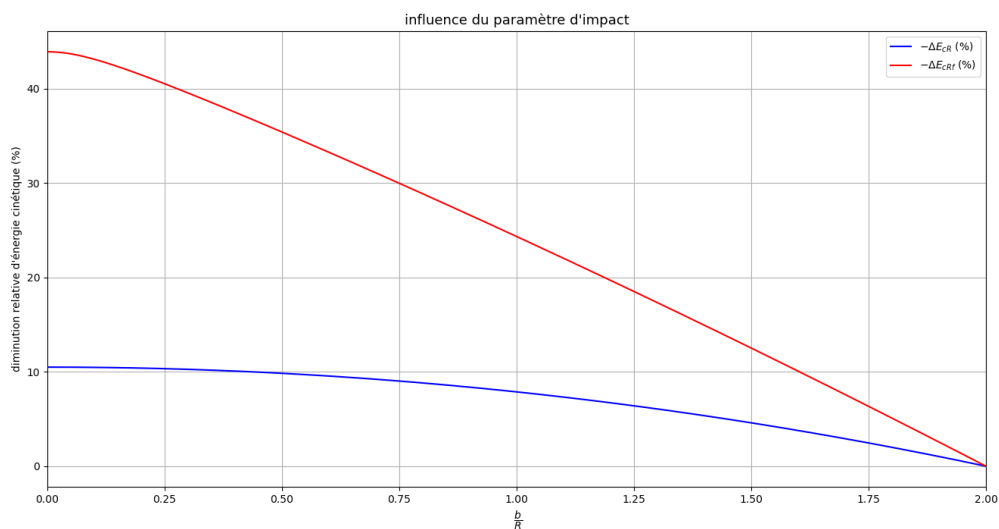
Remarque 2 : On peut aussi s'intéresser à la variation d'énergie cinétique entre l'instant de date $t=0$ et un instant où les deux boules ont acquis leurs vitesses correspondant à des roulements sans glissement. La variation d'énergie cinétique est ainsi :

$$\Delta E_{ct} = \frac{7}{10}m. (V_2'^2 + V_1'^2 - V_1^2)$$

Ce qui conduit à une variation relative :

$$\Delta E_{ct}R = \frac{V_2'^2 + V_1'^2}{V_1^2} - 1$$

La courbe représentant la perte relative d'énergie cinétique est représentée ci-dessous en rouge. Bien sûr, cette variation relative est largement supérieure à celle calculée précédemment sauf pour les valeurs importantes du paramètre d'impact : aux pertes dues au défaut d'élasticité des boules, s'ajoutent les pertes correspondant aux travaux des actions tangentielles exercées par le tapis sur les boules.



retour à la page principale