Circuit “RLC” parallèle en régime transitoire

Résumé

La plupart des professeurs présentent l'étude du circuit “RLC” série en régime transitoire puis demandent aux étudiants, en guise d'approfondissement, d'étudier personnellement le circuit “RLC” parallèle. Nombre d'entre eux éprouvent des difficultés à “réinvestir” ainsi leurs connaissances. Cette fiche devrait les aider !

1 : Position du problème

On suppose l'interrupteur (K) ouvert depuis suffisamment longtemps pour que le condensateur soit déchargé et qu'aucun courant ne circule. On ferme alors l'interrupteur à l'instant de date t=0. Il s'agit d'abord d'étudier qualitativement les valeurs de la tension u et des quatre intensités à la date t $= 0^+$ puis de prévoir les valeurs asymptotiques de ces valeurs. Il faut ensuite établir l'équation différentielle vérifiée par la tension u puis étudier les différents régimes possibles suivant la valeur de la résistance réglable R.

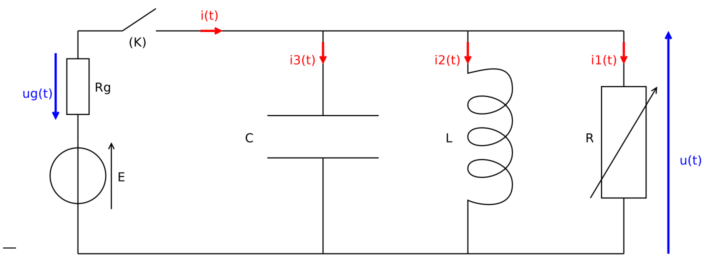


FIGURE 1 –

2 : Valeurs à t=0^+ :

2.1 : Rappels de cours :

Une bobine d'inductance L parcourue par un courant d'intensité i_2 accumule l'énergie magnétique $\frac{1}{2}Li_2^2$. De l'énergie ne peut se créer ou disparaître instantanément : en régime variable, l'énergie est nécessairement fonction continue du temps. Cela impose la continuité de i_2. À retenir : **une bobine impose la continuité de l'intensité dans sa branche de circuit**.

Si u désigne la tension aux bornes d'un condensateur, l'énergie électrique emmagasinée par celui-ci vaut : $\frac{1}{2}Cu^2$. La continuité de l'énergie impose la continuité de la tension. À retenir : **un condensateur impose la continuité de la tension à ses bornes**.

2.2 : Valeurs instantanées à la date t=0^+ :

Puisque, pour t<0 : $u = 0 \quad ; \quad i = i_1 = i_2 = i_3 = 0$, les continuités rappelées précédemment conduisent à :

- continuité de la tension aux bornes du condensateur : $u_{(0^+)} = 0$;
- continuité de l'intensité dans la branche de la bobine : $i_{2(0^+)} = 0$;
- loi d'Ohm appliquée à R : $i_{1(0^+)} = \frac{u_{(0^+)}}{R} = 0$;
- loi d'Ohm appliquée à Rg : $i_{(0^+)} = \frac{u_{g(O^+)}}{R_g} = \frac{E-u_{(0^+)}}{R_g} = \frac{E}{R_g}$;
- loi des nœuds : $i_{3(0^+)} = i_{(0^+)} - i_{1(0^+)} - i_{2(0^+)} = \frac{E}{R_g}$

2.3 : Valeurs des dérivées par rapport au temps à la date t=0^+ :

Nous allons montrer par la suite que les valeurs instantanées précédentes sont solutions d'équations différentielles du second ordre. Les solutions de ces équations font intervenir deux constantes qu'il est possible de déterminer en connaissant deux conditions particulières : les valeurs initiales et les valeurs des dérivées par rapport au temps à l'instant initial que nous allons déterminer dans ce paragraphe.

- tension aux bornes de la bobine : $u = L\frac{di_2}{dt}$; donc : $\left(\frac{di_2}{dt}\right)_{0^+} = 0$;
- intensité du courant à travers la branche du condensateur : $i_3 = C\frac{du}{dt}$; donc : $\left(\frac{du}{dt}\right)_{0^+} = \frac{E}{R_g.C}$;
- loi d'Ohm appliquée à R : $\frac{du}{dt} = R\frac{di_1}{dt}$; donc : $\left(\frac{di_1}{dt}\right)_{0^+} = \frac{E}{R.R_g.C}$;
- loi d'Ohm appliquée à Rg : $i = \frac{E-u}{R_g}$; donc : $\left(\frac{di}{dt}\right)_{0^+} = -\frac{1}{R_g}\left(\frac{du}{dt}\right)_{0^+} = -\frac{E}{R_g^2.C}$
- en dérivant par rapport à t la loi des nœuds : $\left(\frac{di_3}{dt}\right)_{0^+} = \left(\frac{di}{dt}\right)_{0^+} - \left(\frac{di_1}{dt}\right)_{0^+} - \left(\frac{di_2}{dt}\right)_{0^+} = -\frac{E}{R_g.C}\left(\frac{1}{R_g} + \frac{1}{R}\right) = -\frac{E.(R+R_g)}{R.R_g^2.C}$

2.4 : Valeurs asymptotiques :

Il s'agit des valeurs limites lorsque t tend vers l'infini c'est à dire des valeurs en régime permanent. Ces valeurs vont s'obtenir en étudiant les asymptotes aux courbes représentatives des diverses valeurs instantanées. Il est cependant possible de les obtenir simplement sans calculs compliqués. La comparaison permettra de juger de la pertinence des résultats obtenus. Puisqu'il s'agit d'étudier le régime permanent, **il suffit de considérer toutes les dérivées par rapport au temps nulles.**

- tension aux bornes de la bobine : $u = L\frac{di_2}{dt}$; donc : $\lim_{t\to\infty} u = 0$; ainsi, **en régime permanent, la bobine est équivalente à un interrupteur fermé** : elle peut être parcourue par un courant mais la tension à ses bornes est nulle.

- intensité du courant à travers la branche du condensateur : $i_3 = C\frac{du}{dt}$; donc : $\lim_{t\to\infty} i_3 = 0$; ainsi, **en régime permanent, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert** : la tension à ses bornes peut ne pas être nulle mais aucun courant ne traverse sa branche.

- loi d'Ohm appliquée à R : $i_1 = \frac{u}{R} = 0$;
- loi d'Ohm appliquée à Rg : $i = \frac{u_g}{R_g} = \frac{E-u}{R_g} = \frac{E}{R_g}$;
- loi des nœuds : $i_2 = i - i_1 - i_3 = \frac{E}{R_g}$;

2.5 : Récapitulatif des résultats :

	u	i_1	i_2	i_3	i
Valeurs à t=0$^+$	0	0	0	$\frac{E}{R_g}$	$\frac{E}{R_g}$
Dérivées à t=0$^+$	$\frac{E}{R_g.C}$	$\frac{E}{R.R_g.C}$	0	$-\frac{E.(R+R_g)}{R.R_g^2.C}$	$\frac{-E}{R_g^2.C}$
Valeurs pour $t\to\infty$	0	0	$\frac{E}{R_g}$	0	$\frac{E}{R_g}$

3 : Équation différentielle vérifiée par u :

Une méthode simple possible consiste à écrire la loi des nœuds , à dériver tous les termes par rapport au temps puis à exprimer chaque dérivée en fonction de u ou des dérivées de u par rapport au temps.

$$\frac{di}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} + \frac{di_3}{dt}$$

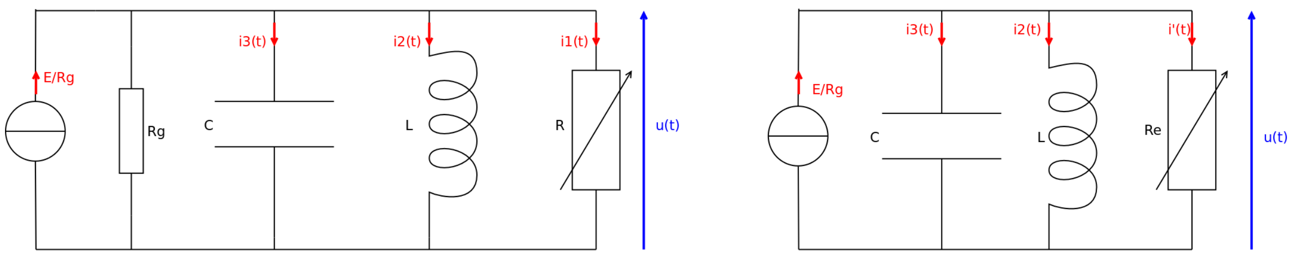
$i = \frac{u_g}{R_g} = \frac{E-u}{R_g}$; donc : $\frac{di}{dt} = -\frac{1}{R_g}\frac{du}{dt}$;
$i_1 = \frac{u}{R}$; donc : $\frac{di_1}{dt} = \frac{1}{R}\frac{du}{dt}$;
$u = L\frac{di_2}{dt}$; donc : $\frac{di_2}{dt} = \frac{u}{L}$;
$i_3 = C\frac{du}{dt}$; donc : $\frac{di_3}{dt} = C\frac{d^2u}{dt^2}$
D'où l'équation différentielle :

$$-\frac{1}{R_g}\frac{du}{dt} = \frac{u}{L} + \frac{1}{R}\frac{du}{dt} + C\frac{d^2u}{dt^2}$$

Pour alléger les notations, on pose : $\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_g}$ soit : $R_e = \frac{R.R_g}{R+R_g}$: résistance équivalente à l'association en parallèle de R et de Rg. En ordonnant l'équation différentielle précédente :

$$\boxed{\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{R_e.C}\cdot\frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}\cdot u = 0}$$

Remarque : *Une fois l'interrupteur fermé, il est possible de remplacer le générateur linéaire de tension (f.é.m. E, résistance interne Rg) par le générateur linéaire de courant équivalent : courant électromoteur $\frac{E}{R_g}$,résistance interne Rg. Il est alors possible de remplacer les deux résistances en parallèle par leur résistance équivalente Re déjà définie plus haut.*



La loi des nœuds conduit à :

$$\frac{E}{R_g} = i' + i_2 + i_3 \quad \textit{soit :} \quad 0 = \frac{di'}{dt} + \frac{di_2}{dt} + \frac{di_3}{dt}$$

$$\frac{1}{R_e}\cdot\frac{du}{dt} + \frac{u}{L} + C\cdot\frac{d^2u}{dt^2} = 0 \quad \textit{soit :} \quad \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{R_e.C}\cdot\frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}\cdot u = 0$$

On retrouve heureusement la même équation différentielle que par l'autre méthode !

Le cas particulier d'un amortissement nul correspond à $\frac{1}{R_e.C} = 0$. L'équation différentielle devient alors très simple :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{LC} \cdot u = 0$$

Elle admet une solution sinusoïdale de pulsation ω_0 **appelée pulsation propre du circuit**. En posant : $u = U_m.\cos(\omega_0.t + \varphi)$, la dérivée seconde par rapport au temps a pour expression : $\frac{d^2u}{dt^2} = -\omega_0^2.u$.

L'identification permet de définir la pulsation propre :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L.C}}$$

Le produit R_eC ayant la dimension physique d'un temps, son inverse à la dimension physique d'une pulsation, d'où l'habitude de poser $\frac{1}{R_e.C}$ proportionnel à la pulsation propre. Une tendance récente consiste à écrire :

$$\frac{1}{R_e.C} = \frac{\omega_0}{Q}$$

où Q est un nombre sans dimension appelé « facteur de qualité » du circuit. Cette notation présente deux inconvénients :

1° : l'existence de Q au dénominateur complique fortement les calculs :

2° : comme cela va apparaître très bientôt dans le calcul du discriminant : faire apparaître un « 2 » dans la constante allège notablement les calculs.

Nous poserons donc :

$$\frac{1}{R_e.C} = 2.\alpha.\omega_0$$

ce qui revient à poser :

$$Q = \frac{1}{2\alpha} = R_e.C.\omega_0 = R_e.\sqrt{\frac{C}{L}}$$

4 : Les trois cas de régime transitoire :

4.1 : Généralités :

L'équation différentielle vérifiée par u s'écrit donc de manière générale :

$$\boxed{\frac{d^2u}{dt^2} + 2.\alpha.\omega_0 \cdot \frac{du}{dt} + \omega_0^2 \cdot u = 0}$$

On cherche des solutions de la forme : $u = K.e^{r.t}$.

$$\frac{du}{dt} = r.u \quad ; \quad \frac{d^2u}{dt^2} = r^2.u$$

r est ainsi solution de l'équation caractéristique :

$$r^2 + 2.\alpha.\omega_0 \cdot r + \omega_0^2 = 0$$

Son discriminant vaut :

$$\triangle = 4.\alpha^2.\omega_0^2 - 4.\omega_0^2 = 4.\omega_0^2.\left(\alpha^2 - 1\right)$$

Remarque : on voit bien ici l'intérêt du « 2 » introduit dans la constante.

4.2 : Régime pseudo-périodique :

4.2.1 : Étude théorique :

Il correspond à :

$$\triangle < 0 \quad soit \quad \alpha < 1 \quad soit \quad Q > \frac{1}{2}$$

Les racines de l'équation caractéristique sont deux complexes conjuguées :

$$r_1 = -\alpha.\omega_0 + j.\omega_0.\sqrt{1-\alpha^2} \quad ; \quad r_2 = -\alpha.\omega_0 - j.\omega_0.\sqrt{1-\alpha^2}$$

Pour alléger les notations, on peut définir la pseudo pulsation ω par la relation :

$$\omega = \omega_0.\sqrt{1-\alpha^2} = \omega_0.\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

Les solutions sont alors de la forme :

$$\boxed{u = U_m.e^{-\alpha.\omega_0.t}.\cos(\omega.t+\varphi) = e^{-\alpha.\omega_0.t}.(K_1.\cos(\omega.t)+K_2.\sin(\omega.t))}$$

Remarque 1 : ce régime peut être décrit comme un régime d'oscillations de pseudo pulsation ω dont l'amplitude décroît exponentiellement au cours du temps.

Remarque 2 : la solution fait intervenir deux constantes (K_1 et K_2 ou U_m et φ), d'où la nécessité de connaître deux conditions particulières : en général la valeur initiale et la valeur initiale de la dérivée par rapport au temps.

$u_{(0)} = 0 = K_1$. L'expression de la dérivée par rapport au temps s'écrit alors :

$u = e^{-\alpha.\omega_0.t}.K_2.\sin(\omega.t)$ d'où l'expression de la dérivée : $\frac{du}{dt} = -\alpha.\omega_0.u + \omega.e^{-\alpha.\omega_0.t}.K_2.\cos(\omega.t)$

$\left(\frac{du}{dt}\right)_{0^+} = \frac{E}{R_g.C} = \omega.K_2$; d'où l'expression de u pour le montage étudié ici :

$$\boxed{u = \frac{E}{R_g.C.\omega}\cdot e^{-\alpha.\omega_0.t}\cdot\sin(\omega.t)}$$

Remarque 3 : pour estimer la durée de ce régime transitoire, on part de la constatation suivante : $e^{-5} \approx 6,7.10^{-3}$; $\left(1-e^{-5}\right) \approx 99,3.10^{-2}$. *On peut donc considérer qu'au bout d'une durée* $t_1 = \frac{5}{\alpha.\omega_0} = \frac{10Q}{\omega_0}$ *le régime permanent est atteint avec une erreur relative commise inférieure à 0,7%.*

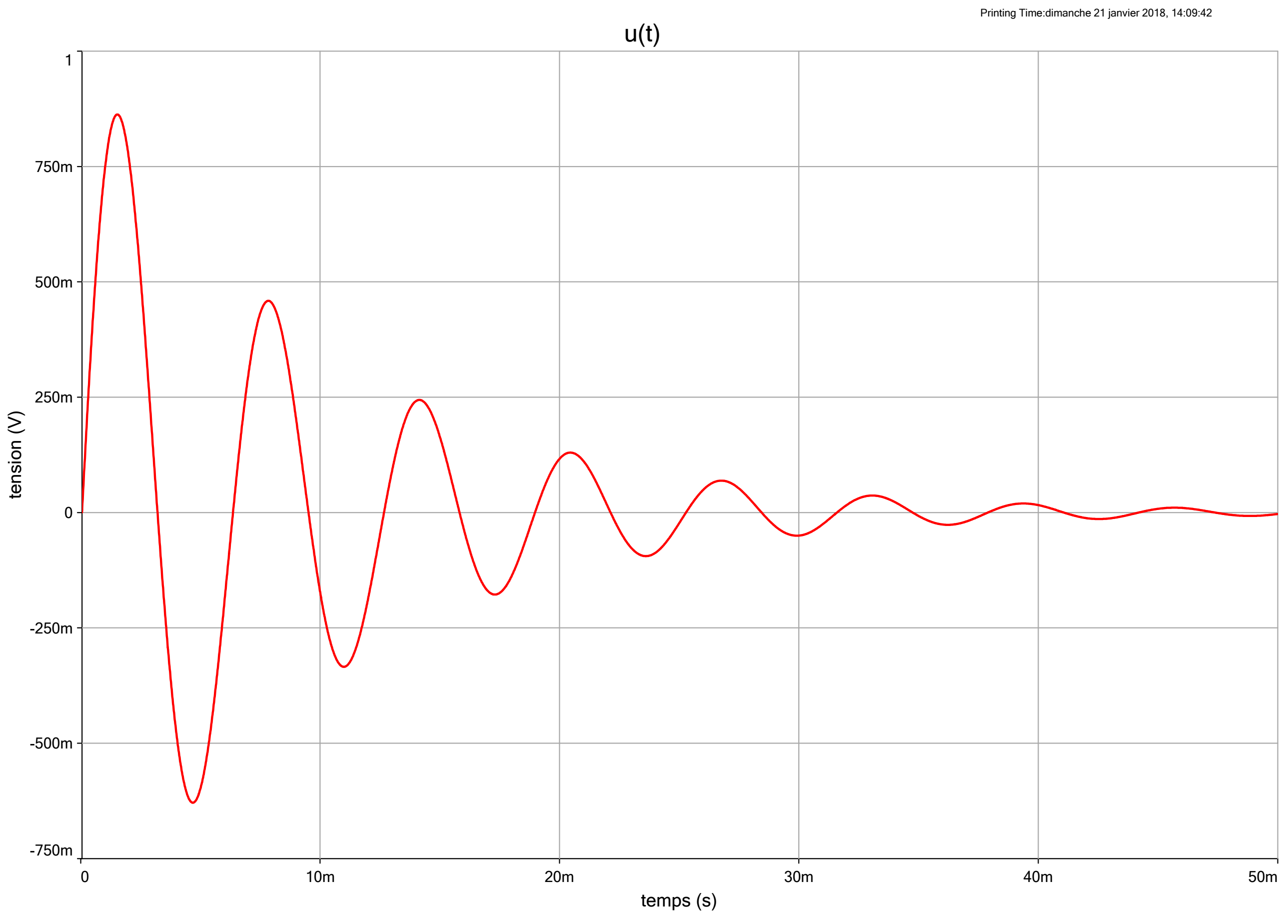
Remarque 4 : ayant obtenu l'expression de u en fonction de t, il est facile d'obtenir les expressions des différentes intensités à partir des relations :

$$i_1 = \frac{u}{R} \quad ; \quad i_3 = C.\frac{du}{dt} \quad ; \quad i = \frac{E-u}{R_g} \quad ; \quad i_2 = i_2 = i - i_1 - i_3$$

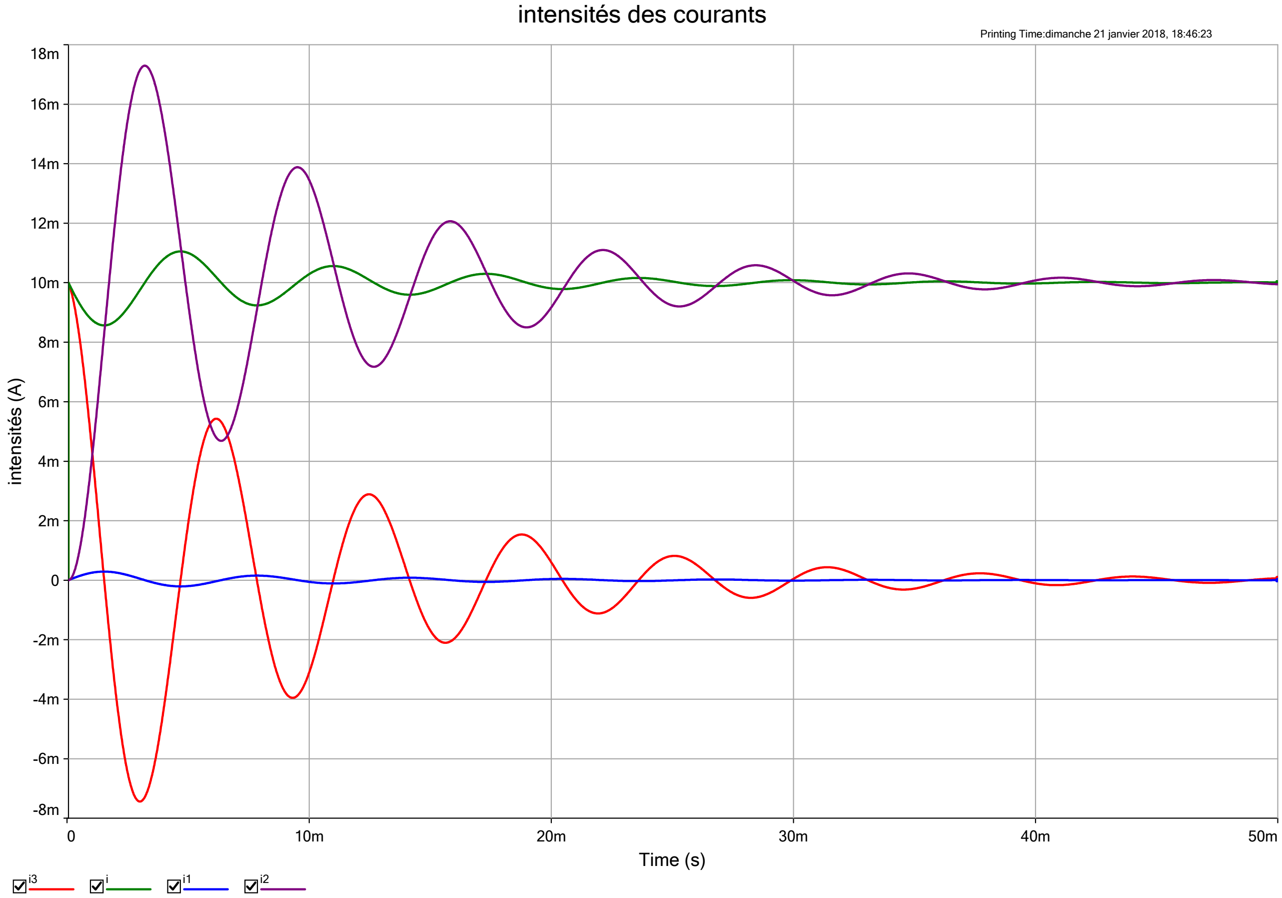
4.2.2 : Étude d'un cas particulier :

Nous choisissons : L=100mH et C=10µF de façon à obtenir une pulsation propre : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L.C}} = 10^3 rad/s$. De façon à obtenir Q=5 soit $\alpha = \frac{1}{2Q} = 0,1$, nous choisissons : $R_e = \frac{Q}{C\omega_0} = 500\Omega$.

Remarque : pour certains générateurs : $R_g = 600\Omega$; il faut donc ajuster R de sorte que : $\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_g} + \frac{1}{R}$ soit $R = \frac{R.R_g}{R_g - R} = 3k\Omega$. Pour E=6V, une simulation informatique du fonctionnement du circuit conduit pour u à la courbe suivante :



Il est possible de vérifier l'accord entre cette courbe et l'étude théorique précédente. Je présente ci-dessous les courbes correspondant aux différentes intensités. Je laisse le lecteur vérifier que les valeurs initiales, les coefficients directeurs des tangentes en t=0 ainsi que les valeurs asymptotiques sont conformes à l'étude théorique résumée dans le tableau §2.5 ...



4.2.3 : Exemple de détermination de Q.

Il est fréquent en travaux pratique de devoir mesurer Q à partir d'un enregistrement de la courbe u=f(t) obtenue à l'aide d'un oscilloscope numérique ou d'une carte d'acquisition. On peut commencer par remarquer que les maximums successifs de u sont obtenus à dates successives séparées de T la pseudo période. Cela se démontre aisément à partir de l'expression de la dérivée de u par rapport à t :

$$\frac{du}{dt} = \frac{E}{R_g.C.\omega} \cdot e^{-\alpha.\omega_0.t} \cdot [\omega.\cos(\omega.t) - \alpha.\omega_0.\sin(\omega.t)]$$

Les extremums de u sont obtenus pour une valeur nulle de la dérivée, soit pour :

$$\tan(\omega.t) = \frac{\omega}{\alpha.\omega_0} = \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}$$

Ce qui prouve que l'on obtient un maximum toutes les T secondes et un minimum toutes les T secondes avec comme expression de l pseudo période :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0.\sqrt{1-\alpha^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1-\alpha^2}} = \frac{2\pi\sqrt{L.C}}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}$$

Pour vérifier expérimentalement la décroissance exponentielle de l'amplitude, on relève les maximums successifs de u et les dates correspondantes.

On constate que la durée entre deux maximums successifs est très proche de 6,30ms. On peut donc poser $T \approx 6,30ms$ Comme prévu par la théorie précédente, cette valeur est bien un peu supérieure à la période propre : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \approx 6,28ms$. Cependant, l'écart relatif est trop faible entre T et T_0 pour permettre une détermination précise de α et de Q. On préfère utiliser la méthode du décrément logarithmique. Par définition, le décrément logarithmique vaut :

$$\boxed{\delta = \ln\left(\frac{u(t)}{u(t+T)}\right)}$$

Soit ici :

$$\delta = \ln\left(\frac{\exp(-\alpha \cdot \omega_0 \cdot t) \cdot \sin(\omega \cdot t)}{\exp(-\alpha \cdot \omega_0 \cdot (t+T)) \cdot \sin(\omega \cdot (t+T))}\right) = \ln(\exp(\alpha.\omega_0 \cdot T)) = \alpha.\omega_0 \cdot T$$

puisque : $\sin(\omega \cdot (t+T)) = \sin(\omega \cdot t + 2\pi) = \sin(\omega \cdot t)\ \forall t$.
Soit encore :

$$\delta = \frac{\alpha.\omega_0 \cdot T_0}{\sqrt{1-\alpha^2}} = 2\pi \cdot \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}$$

ou :

$$\delta = 2\pi \cdot \frac{1}{2Q.\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2-1}}$$

On s'intéresse aux six premiers maximums successifs :

n	0	1	2	3	4	5
t(ms)	1,502	7,804	14,107	20,409	26,711	33,002
u(t) (mV)	862,33	458,70	243,96	129,73	69,99	36,69
ln(u(t))	6,760	6,128	5,497	4,865	4,234	3,602
t_n- t_{n-1} (ms)		6,302	6,303	6,302	6,302	6,291

Si on note Uo la valeur du premier maximum de u, pour lequel n=0, la valeur du deuxième maximum (n=1) est $Uo.\exp(-\delta)$; la valeur du troisième maximum (n=2) est $Uo.\exp(-2\delta)$; plus généralement, la valeur du maximum de numéro n est $Uo.\exp(-n.\delta)$, de sorte qu'il est possible de poser, pour les maximums successifs :

$$\ln\left(u_{(t)}\right) = -n.\delta + \ln(U_0)$$

Pour vérifier expérimentalement le caractère exponentiel de l'amortissement et mesurer le décrément logarithmique, il suffit de représenter en fonction de n le logarithme des maximums successifs. Puisque les valeurs proviennent d'une simulation informatique, l'accord avec la théorie est évidemment excellent comme en témoigne la valeur du carré du coefficient de régression extrêmement proche de 1. On en déduit la valeur du décrément logarithmique : $\delta \approx 0,631$. Cela permet d'obtenir le facteur de qualité :

$$Q = \sqrt{\frac{\pi^2}{\delta^2} + \frac{1}{4}} \approx 5,004$$

Là encore bien sûr : l'accord avec la théorie est excellent !

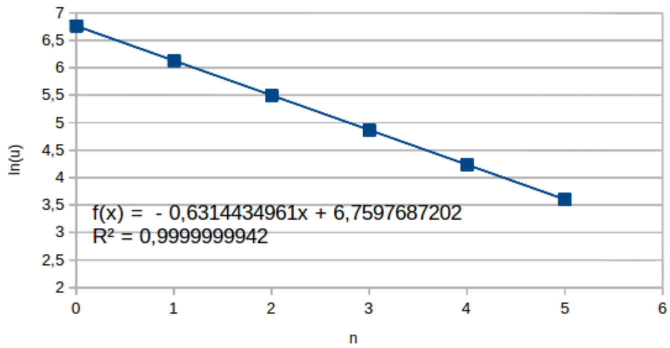


FIGURE 2 –

4.3 : Étude du régime critique :

4.3.1 : Étude théorique :

Il s'agit du cas limite correspondant à :

$$\triangle = 0 \quad soit \quad \alpha = 1 \quad ou \quad Q = \frac{1}{2}$$

L'équation caractéristique admet alors une racine double : $r = -\alpha.\omega_0$. L'expression générale de u est alors :

$$u = (A.t + B) \cdot e^{-\alpha.\omega_0.t}$$

L'expression de la dérivée est :

$$\frac{du}{dt} = -\alpha.\omega_0.u + A.e^{-\alpha.\omega_0.t}$$

En tenant compte des conditions initiales :

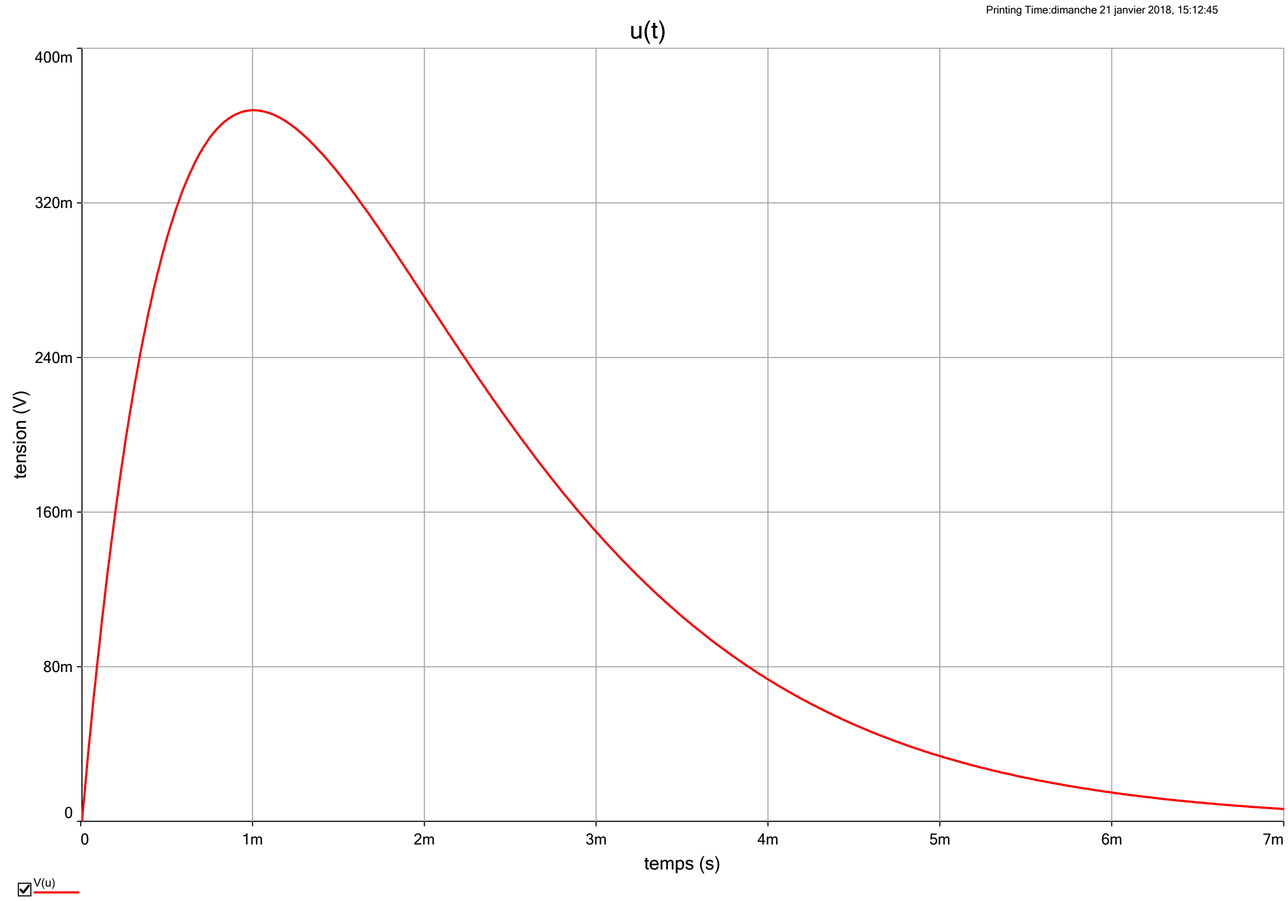
$$u_{(0)} = 0 = B \quad ; \quad \left(\frac{du}{dt}\right)_{0+} = \frac{E}{R_g.C} = A$$

D'où l'expression de u :

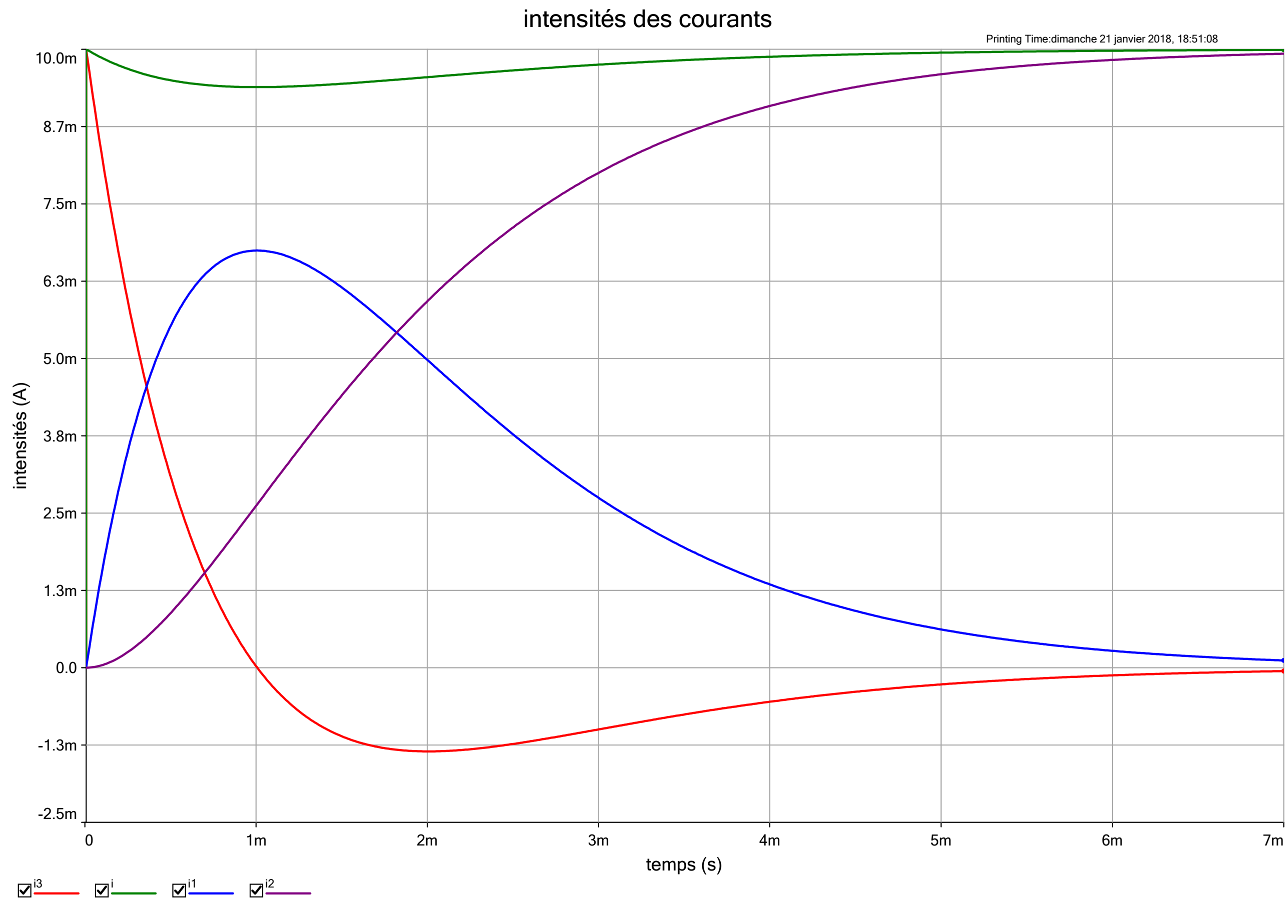
$$\boxed{u = \frac{E}{R_g.C} \cdot t \cdot e^{-\alpha.\omega_0.t}}$$

4.3.2 : Simulation informatique :

En conservant les valeurs précédentes de L et C, on règle $Q = \frac{1}{2}$ en choisissant $R_e = \frac{Q}{C\omega_0} = 50\Omega$, soit, en conservant E=6V et $R_g = 600\Omega$: $R = \frac{R.R_g}{R_g - R} = 54,5\Omega$. On obtient pour u la courbe suivante :



Et pour les intensités :



On constate que la durée du régime transitoire est environ 7 fois plus courte que dans le cas précédent. On peut démontrer que le cas particulier du régime critique est le cas où le régime asymptotique est obtenu **le plus rapidement sans dépassement de la valeur asymptotique**. Si on tolère un léger dépassement de la valeur asymptotique avant stabilisation, on peut montrer que le régime transitoire le plus court correspond à $\alpha = 0,7$.

4.4 : Étude du régime apériodique :

4.4.1 : Étude théorique :

Cette situation correspond à :

$$\triangle > 0 \quad soit \quad \alpha > 1 \quad ou \quad Q < \frac{1}{2}$$

Les racines de l'équation caractéristiques sont deux valeurs réelles positives :

$$r_1 = -\alpha.\omega_0 + \omega_0.\sqrt{\alpha^2 - 1} \quad ; \quad r_2 = -\alpha.\omega_0 - \omega_0.\sqrt{\alpha^2 - 1}$$

La solution de l'équation différentielle a pour expression générale :

$$u = A.e^{r_1.t} + B.e^{r_2.t}$$

Remarque : les deux racines réelles sont nécessairement négatives; des racines positives conduiraient à une limite de u infinie quand t tend vers l'infini, ce qui est physiquement absurde.

$$\frac{du}{dt} = A.r_1.e^{r_1.t} + B.r_2.e^{r_2.t}$$

Les conditions initiales permettent de poser :

$$u_{(0)} = A + B = 0 \quad ; \quad \left(\frac{du}{dt}\right)_{0^+} = \frac{E}{R_g.C} = A.r_1 + B.r_2$$

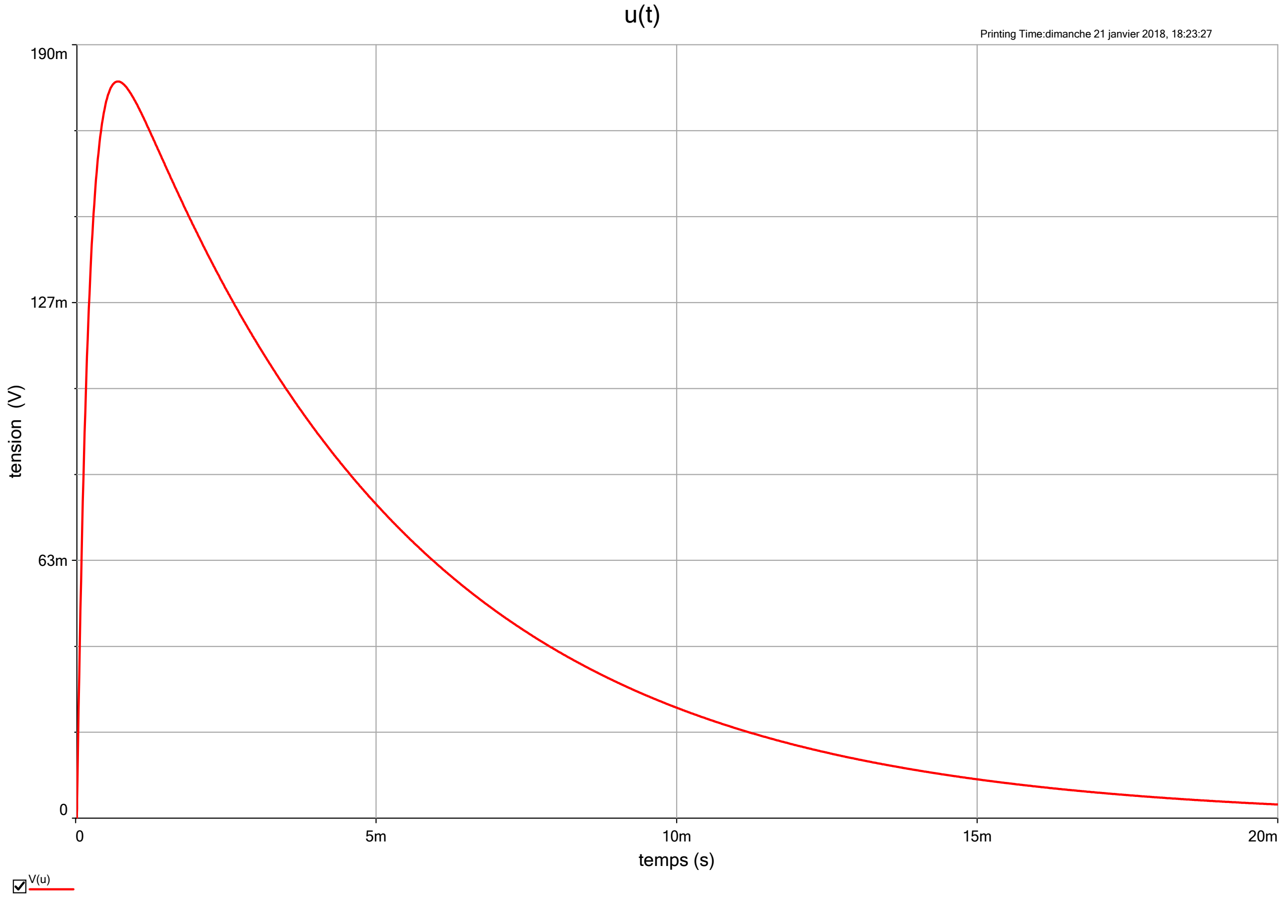
Soit :

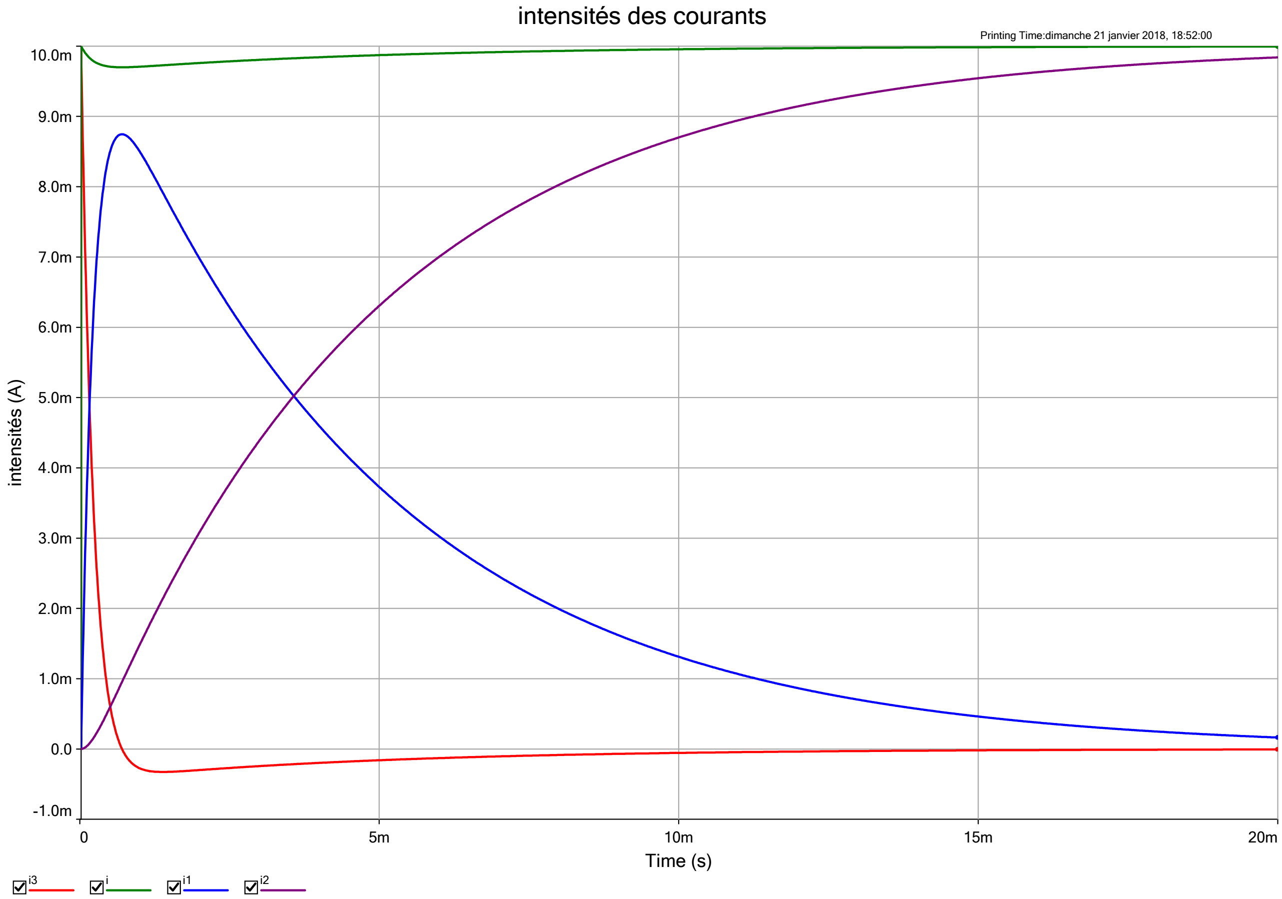
$$A = -B = \frac{E}{R_g.C.\left(r_1 - r_2\right)} = \frac{E}{2R_g.C.\omega_0.\sqrt{1 - \alpha^2}}$$

$$\boxed{u = \frac{E}{2R_g.C.\omega_0.\sqrt{1 - \alpha^2}} \cdot \left(e^{r_1.t} - e^{r_2.t}\right)}$$

4.4.2 : Étude d'un cas particulier :

De façon à obtenir Q=0,2 soit $\alpha = \frac{1}{2Q} = 2,5$, nous choisissons : $R_e = \frac{Q}{C\omega_0} = 20\Omega$. En conservant les caractéristiques du générateurs identiques à celles du cas précédent : $R = \frac{R.R_g}{R_g - R} = 20,7\Omega$. La simulation conduits aux courbes suivantes :





Là encore, il peut être intéressant de vérifier les valeurs initiales, les coefficients directeurs des tangentes en $t = 0$ et les valeurs asymptotiques.

On remarque que la durée du régime transitoire est nettement plus longue que dans le cas précédent du régime critique.

retour à la page principale